① ALGEBRA COMMUTATIVA

Richiami (da Algebra 2):

(a.) LOCALIZZAZIONI : $S = A - p$ con $p \in \operatorname{Spec} A$: $A_p = S^{-1}A$, $M_p = S^{-1}M$

<u>Def</u>: una proprietà $\hat{\wp}$ si dice locale se:

- M soddisfa $\wp \Rightarrow S^{-1}M$ soddisfa $\wp$ $\forall S$
- M soddisfa $\wp \Leftrightarrow M_m$ soddisfa $\wp$ $\forall m \in \operatorname{Max} A$

Ex: • "essere 0" proprietà locale : $n \in M$: $n = 0 \Leftrightarrow n_m = 0$ $\forall m$ MAX
$M = 0 \Leftrightarrow M_m = 0$ $\forall m$ MAX

• $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta $\Leftrightarrow 0 \to X_m \to Y_m \to Z_m \to 0$ esatta $\forall m$

• "essere PIATTO" proprietà locale
Infatti: $(M \otimes_A X)_m \cong M_m \otimes_{A_m} X_m$ + S^{-1} funtore esatto

• La <u>noetherianità</u> non è una proprietà locale. $\left[\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}\right]$

$A \to A_p$ è locale con id max p e ideali primi $= \{ q_p \mid q \subset p \text{ primo} \}$

(b.) PIATTEZZA:

• $\otimes_A M$ è esatto a dx ($X \xrightarrow{\alpha_0} Y \xrightarrow{\beta_0} Z \to 0$ es $\Rightarrow X \otimes M \to Y \otimes M \to Z \otimes M \to 0$ esatta).

Ovvero: $X \otimes M \xrightarrow{\alpha} Y \otimes M \xrightarrow{\beta} Z \otimes M \to 0$
esatta se e solo se $Z \otimes M \simeq \operatorname{coker} \alpha = T$

Quindi:
$$\begin{tikzcd}
X \otimes M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "0"'] & Y \otimes M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & Z \otimes M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$
esatta se e solo se $\underline{\underline{\exists g}}$: $g \circ \beta = f$

Inoltre $\operatorname{Hom}_A(Y \otimes M, T) \overset{(1)}{\simeq} \operatorname{Bil}_A(Y \times M, T)$ e uguale su

$\Rightarrow \exists \tilde{f}$,
$$\begin{tikzcd}
X \times M \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dr, "0 = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha}"'] & Y \times M \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & Z \times M \arrow[dl, "\tilde{g}"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

$\tilde{\alpha}(x, m) = (\alpha_0(x), m) \Rightarrow$ $\tilde{f}(\tilde{\alpha_0}(x) + y, m) = \tilde{f}(y, m)$
uguale $\tilde{\beta}$ e $\tilde{f}(y, m) = f(y \otimes m)$
$\to$ buona def $\tilde{f}$ $(\tilde{f} \circ \tilde{\alpha} = 0)$

$\exists \tilde{g}$: $\tilde{g}(\tilde{\beta}(y_0), m) = \tilde{f}(\beta$

$\Rightarrow$ per (1) trovo g che cercavo

def PIATTO:

Oss: M libero $\Rightarrow$ M piatto: $M \simeq A^{\oplus I}$, $A^{\oplus I} \otimes X = X^{\oplus I}$
quindi: $\Phi: X \to Y$ è iniettiva allora: $\varphi_M: X^{\oplus I} \to Y^{\oplus I}$ iniettiva
$(x_i) \mapsto (\Phi(x_i))$

M proiettivo $\Rightarrow$ M piatto: M proiettivo:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed] \arrow[d] & \\ X \arrow[r, two heads] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

M proiettivo $\Leftrightarrow$ M addendo diretto di un modulo libero

Infatti: M proiettivo $\to L = M \oplus N$ libero $\Rightarrow L$ piatto

$\Phi: X \to Y$ iniettiva, so che $\Phi_L: X \otimes L \to Y \otimes L$ iniettiva

ma $\Phi_L: X \otimes M \oplus X \otimes N \to Y \otimes M \oplus Y \otimes N$
$(x \otimes m + x' \otimes n) \mapsto (\Phi(x) \otimes m + \Phi(x') \otimes n)$

ovvero in particolare $x \otimes m \xrightarrow{\Phi_M} \Phi(x) \otimes m$ iniettiva

Oss: A PID: M proiettivo $\Leftrightarrow$ M libero

Se M non è piatto $\Rightarrow \exists X, Y$ fin. generati, $f: X \hookrightarrow Y$ ma $f_M: X \otimes M \to Y \otimes M$ non iniettiva

Dim: So che esistono X_0, Y_0 e $f: X_0 \hookrightarrow Y_0$ t.c. f_M non iniett.

Ovvero $\exists\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes m_i$ t.c. $f_m(x) = 0$, $x \neq 0$.

Voglio dire che $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ $\underset{\text{più}}{\wedge}$ trovo Y che soddisfa

$f_m(x) = \sum \underbrace{f_m(x_i)}_{y_i} \otimes m_i = 0$: $Y' = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \ni \sum y_i \otimes m_i$

In generale $f_m(x) = 0 \to \sum y_i \otimes m_i \overset{(\cdot)}{\in} \langle \text{rel. bilineari} \left(\bigoplus_{\substack{m \in M \\ n \in N}} A\tau(m,n) \right) \rangle$
e quindi non è detto che sia 0 in $Y' \otimes M$.

Ma sicuramente $\exists\, Y$ fin generato t.c. $Y' \subset Y$
e $\sum y_i \otimes m_i = 0$ in $Y \otimes M$.

$(\cdot)$ dice che $f_m(x)$
è comb. lineare (finita)
di cose del tipo $\tau(m+n) - \tau(m) - \tau(n)$ ecc.

Prop: A PID: M A-modulo è piatto $\Leftrightarrow$ Tors(M) = 0

Dim: ($\Rightarrow$) [Vale per tutti i domini] Tors(M) = 0 $\Leftrightarrow \forall a \in A$ $\varphi_a: M \hookrightarrow M$
$m \mapsto am$

Allora: $0 \to A \xrightarrow{\cdot a} A$ iniettiva e M piatto:
$x \mapsto ax$

$\Rightarrow 0 \to A \otimes M \xrightarrow{\varphi} A \otimes M$ è iniettiva
$x \otimes m \mapsto ax \otimes m$

Però $A \otimes M \overset{j}{\simeq} M$ e $m \overset{j}{\mapsto} 1 \otimes m \overset{\varphi}{\mapsto} a \otimes m = 1 \otimes am \overset{j^{-1}}{\mapsto} am$
Ovvero $\varphi_a = j^{-1} \varphi j$ e quindi anche φ_a è iniettiva

<u>Oss</u>: Se M è un A-modulo t.c. tutti i suoi sottomoduli fin. generati sono PIATTI $\Rightarrow$ M è PIATTO.

Infatti: $f: X \hookrightarrow Y \Rightarrow f_M: X \otimes M \to Y \otimes M$ e supponiamo
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes m\right) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes m = 0$$
Ma quindi (come prima) esiste $M' \subset M$ t.c. $m_i \in M'$ $\forall i$, $\sum f(x_i) \otimes m = 0$ $\otimes M' \subset Y \otimes M$.
$\underset{M' \text{ piatto}}{\Longrightarrow} \sum x_i \otimes m = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Considero $M' \subset M$ f.g : $\mathrm{Tors}(M') \subset \mathrm{Tors}(M) = 0$

$\rightarrow$ M' è libero (fin. generato e libero da torsione $\rightarrow$ sottom. di un libero in un PID) quindi piatto

Ma questo è vero $\forall M' \subset M$ f.g $\Rightarrow$ M è piatto.

Ex: $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo piatto ma non libero
$\prod \mathbb{Z}$ è piatto ma non libero

<u>Prop</u>: M è PIATTO $\Longleftrightarrow$ $\forall$ I ideale di A $\underset{x \otimes m}{I \otimes M} \longrightarrow \underset{xm}{M}$ iniettiva

<u>Dim</u>: $\boxed{\Rightarrow}$ M piatto e $I \overset{i}{\hookrightarrow} A \Rightarrow \underset{x \otimes m}{I \otimes M} \to \underset{x \otimes m}{A \otimes M} \simeq \underset{xm}{M}$ iniettivo

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo M non sia piatto

$X \overset{i}{\to} Y \to Z \to 0$ con $Z \simeq \mathrm{coker}\, i \simeq Y/X$

$X \otimes M \to Y \otimes M$ non è iniettiva

① $Z \simeq A/I$ $\rightarrow$
$$\begin{array}{ccccc} X & \to & Y & \to & Z \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\ I & & A & & A/I \end{array}$$

② Z f.g. in generale

$M \simeq Y/X$

$0 \to X \to Y \to M \to 0$

© DECOMPOSIZIONE PRIMARIA

I ideale di $A \to \mathrm{Ass}(I) = \{(I:x) \text{ primi}\}$
p si dice minimale su I se $I \subset p$ e non $\exists q$ primo t.c. $I \subset q \subset p$

ex: $A = \mathbb{C}[x,y]$ $I = (x^2, xy) \to I \subset (x)$, $I \subset (x,y)$

A noetheriano $\Rightarrow$
- $\mathrm{Ass}_A(I)$ finito
- zero divisori di A: $\mathrm{Div}(A) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}(0)} p$
- $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}I) = S^{-1}(\mathrm{Ass}_A(I))$
- minimali $\Rightarrow$ associato

Inoltre valgono:
- $\mathrm{Ass}_{A/I}(0) = \mathrm{Ass}_A(I)/I$
- $x \in I \Leftrightarrow x \in I_p \quad \forall p \in \mathrm{Ass}_A I$
- [Scansamento]: $I \subset \bigcup p_i$ primi (tranne al più 2) $\Rightarrow I \subset p_j$ per qualche j

$x \in I - J$ $y \in I$ t.c. $y \in K$ $y \notin J$ $\to$ $x \in K$? $x+y \notin J \cup K$

Def: I primario: $xy \in I \Rightarrow x \in I$ o $y^n \in I$
- $\sqrt{I}$ max $\Rightarrow I$ primario; I primario $\Rightarrow \sqrt{I}$ primo.

[A noetheriano $\Rightarrow$] $\forall I$ ideale di A $\exists Q_i$ primari: $I = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$
Se $\{Q_i\}$ minimale $\to \{\sqrt{Q_i}\} = \mathrm{Ass}_A(I)$ e $\sqrt{Q_i}$ tutti distinti
$Q_i \not\subset Q_j$, n minimo

Quindi I primario $\Leftrightarrow |\mathrm{Ass}_A(I)| = 1$

* **Teo** [degli zeri di Hilbert]
$\mathbb{K}$ campo alg. chiuso e $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. $I \subset S \to \bar{V}(I) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : f(\alpha) = 0 \ \forall f \in I\}$
$X \subset \mathbb{R}^n \to \bar{I}(X)$

$\Rightarrow$ 1. $I \subsetneq S \Rightarrow \bar{V}(I) \neq \emptyset$
2. m ideale massimale di $S \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^n : m = \bar{I}(\alpha) = m_\alpha = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_n - \alpha_n)$
3. $\bar{I}(\bar{V}(I)) = \sqrt{I}$

Cor: i) I, J ideali di $S \Rightarrow \sqrt{I} = \sqrt{J} \Leftrightarrow \bar{V}(I) = \bar{V}(J)$
ii) $\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{I \subset m \\ \max}} m = \bigcap_{\alpha \in \bar{V}(I)} m_\alpha$

Dim: i) È sempre vero che $\bar{V}(I) = \bar{V}(\sqrt{I})$ $(\sqrt{\bar{I}(X)} = \bar{I}(X))$

ii) $\{I \subset m \max\} = \{m_\alpha : \alpha \in \bar{V}(I)\}$: m max $\Rightarrow m = m_\alpha$ per qualche α

Ora $m_\alpha \supseteq I \Leftrightarrow \alpha = V(m_\alpha) \subset V(I)$

Sicuramente $\sqrt{I} \subset \bigcap_{I \subset m} m$

$\supseteq$: $I \to V(I) = \{\alpha \text{ t.c. } m_\alpha \supset I\} \Rightarrow \sqrt{I} = \bar{I}(\bar{V}(I)) = \bigcap_{\alpha \in V(I)} m_\alpha$

(i) $\to$ I, J primi $\Rightarrow I = J \Leftrightarrow \bar{V}(I) = \bar{V}(J)$ [$\cdot$]

- Consideriamo $A = S/_I$ $\mathbb{K}$-alg finitamente generata

$\text{Max } S = \{m_\alpha\} \leftrightarrow \mathbb{K}^n \ (= \bar{V}(0))$

Su A vale $\text{Max } A \leftrightarrow \{m \in \text{Max} S : I \subset m\} = \{m_\alpha : \alpha \in \bar{V}(I)\} \leftrightarrow \bar{V}(I)$

ex: P, Q ideali primi di A, $P = Q \Leftrightarrow \bar{V}_I(P) = \bar{V}_I(Q)$

dove $\bar{V}_I(J) = \{\alpha \in \bar{V}(I) : m_\alpha \supset J \text{ o } J \equiv 0 \text{ in } \alpha\}$

Oss: $f \in I, \alpha \in V(I) \to f(\alpha) = 0$. Ma quindi $a \in A, \alpha \in V(I)$ $a(\alpha)$ ben definito

A anello (comm con 1) e consideriamo $Sp(A)$

- $I \subset A$ $V(I) = \{p \in Spec(A) : p \supseteq I\}$

$X_1 \subset Spec A$: $I(X_1) = \bigcap_{p \in X_1} p$

- $\{V(I)\}$ verifica gli assiomi dei chiusi:
  - $\emptyset = V(A)$
  - $Sp A = V(0)$
  - $V(I) \cup (V(J)) = V(I \cap J)$

$\to$ induce una topologia su X

e $\bigcap V(I_j) = \{p \in Spec A : p \supset I_j \ \forall j\} = \{p \in Spec A : p \supset I = (I_j)\} = V(I)$

Indichiamo $X = Spec A$: se $f \in A \Rightarrow (V(f))^c = \underbrace{X \setminus V(f)}_{X_f \text{ aperti fondamentali}}$ è aperto

$\to X_f = \{p \in X \text{ t.c. } f \notin p\}$

- Oss: $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ $\bar{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$. $\bar{X}_f = \{m_\alpha : m_\alpha \in X_f\}$
$= \{m_\alpha : f(\alpha) \neq 0\}$

Claim: $\{X_f\}$ è una base della topologia di X

Sia U aperto di $X \Rightarrow U = X \setminus V(I)$ e $p \in U \longrightarrow p \notin V(I)$: $I \not\subset p$
$\to$ voglio $p \in X_f \subset U$ per qualche f.

$p \in X_f \to f$ t.c. $f \notin p$ ma $X_f \in U \to V(f) \supset V(I)$: $f \in I \setminus p$

Oss: p chiuso $\Leftrightarrow \overline{\{p\}} = \{p\}$ ma $\overline{\{p\}} = V(p) = \{q \supset p\} = \{p\}$ no T2
$\Leftrightarrow$ p è massimale

Oss: $\bigcup X_{f_i} = X$: $\bigcup X_{f_i} = \{p : f_i \notin p \text{ per qualche } i\}$
$= \{p : (f_i) \not\subset p\}$

ovvero $X = \bigcup X_{f_i} \Leftrightarrow (f_i) = A$

- Ma $(f_i) = A \Rightarrow 1 = \sum_{j=1}^{m} f_j \cdot \Rightarrow (f_j)_1^m = A \Rightarrow X = \bigcup_1^m X_{f_j}$ X cmpt

U aperto di X, definisco $\vartheta(U) = \left\{ \sigma \in \prod_{p\in U} A_p \ : \ \forall p \ \exists f \text{ per cui } p \in X_f \subset U \text{ ed } \exists n, a \in A \text{ tali che } \sigma_q = \frac{a}{f^n} \ \forall q \in X_f \right\}$

$A_p = \{ \frac{f}{g} \mid g \notin p \}$

in A_q

Se $V \subset U$: $Res^U_V : \vartheta(U) \to \vartheta(V)$

$$\sigma = (\sigma_q)_{q\in U} \mapsto \sigma|_V = (\sigma_p)_{p\in V}$$

Inoltre $W \subset V \subset U \to Res^V_W \circ Res^U_V = Res^U_W$

Prop: Se $U = \bigcup U_\alpha$: ① $\sigma \in \vartheta(U)$ e $Res^U_{U_\alpha}(\sigma) = 0 \ \forall \alpha \Rightarrow \sigma = 0$

② $\sigma_\alpha \in \vartheta(U_\alpha)$ e $\sigma_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sigma_\beta|_{U_\beta \cap U_\alpha} \Rightarrow \exists \sigma \in \vartheta(U)$ che le estende

Dim: ① $\sigma \in \vartheta(U)$: voglio dimostrare che se $Res^U_{U_\alpha}(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma_p = 0 \ \forall p$

$\to p \in U = \bigcup U_\alpha \to \exists \alpha_0 : p \in U_{\alpha_0}$ e so che $\sigma|_{\alpha_0} = 0$

ovvero $(\sigma_q)_{q\in U_{\alpha_0}} = 0$ e poiché $p \in U_{\alpha_0}$ $\sigma_p = 0$.

$X = \operatorname{Spec} A$ e voglio definire qualcosa di analogo alle funzioni su X 10/01

ex: $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ t.c. $\mathbb{K}^n = \bigcup_{i=1}^N X_{f_i}$

dove $f|_{X_{f_i}} = \frac{g_i}{f_i^n}$ ← localmente rapporto di polinomi

Voglio definire ϑ in modo che $\vartheta(X) = A$

$$\vartheta(X_f) = A_f = \left\{ \frac{a}{f^n} \right\}$$

allora definisco

$$\vartheta(U) = \left\{ \sigma \in \prod_{p\in U} A_p : \forall p \ \exists f \text{ con } p \in X_f \subset U \text{ ed } \exists n, a \in A \text{ t.c. } \sigma_q = \frac{a}{f^n} \in X_f \right\}$$

ex: $A = \mathbb{C}[x,y,z,w] / (xy - zw)$ e $U = X_x \cup X_w$

Voglio descrivere un elemento di $\vartheta(U) \ni \sigma$:

$\sigma \in \vartheta(U)$ t.c. $\sigma_p = \left(\frac{z}{x}\right)_p$ se $p \in X_x$

$\sigma_q = \left(\frac{y}{w}\right)_q$ se $q \in X_w$ $\to f = \left(\frac{z}{x}\right) \in A_x$, $g = \left(\frac{y}{w}\right) \in A_w$

Ma allora: $p \in X_x \cap X_w = \{ xw \notin p \}$, qui vale:

$\left(\frac{z}{x}\right) \in A_x \to \frac{zw}{xw}$ in A_{wx} ma $zw = xy \to \frac{zw}{xw} = \frac{xy}{xw} \in A_{xw} \to \frac{y}{w} \in A_w$

Detto meglio: $\alpha_q : A_x \to A_q \quad q \in X_x$ e $\alpha : A_x \to A_{xw}$

$\beta_q : A_w \to A_q \quad q \in X_w$ $\quad \beta : A_w \to A_{xw}$

$\gamma_q : A_{xw} \to A_q \quad q \in X_{xw}$

e so che $\alpha(f) = \beta(f)$

$\to \gamma_q \circ \alpha = \alpha_q$ e $\gamma_q \circ \beta = \beta_q$

Allora definiamo:

$$\sigma_p = \begin{cases} \alpha_p(f) \in A_p & q \in X_x \\ \beta_p(f) \in A_p & q \in X_w \end{cases}$$

devo far vedere che è ben def.

$p \in X_{xw} \to \alpha_p(f) = \gamma_p \circ \alpha(f) = \gamma_p \circ \beta(f) = \beta(f)$

Prop: $\vartheta(X) = A$ e più in generale $\vartheta(X_f) = A_f$

Dim: $A \xrightarrow{\varphi} \vartheta(X)$ ed osserviamo che φ è iniettiva (essere 0 prop locale: $a_p = 0 \ \forall p \Rightarrow a = 0$)

$a \mapsto \sigma$ t.c. $\sigma_p = \frac{a}{1} \in A_p$

φ è surgettiva: $\sigma \in \vartheta(X)$: $\forall p \ \exists n_p, f_p, a_p$ t.c.

$\sigma_q = \left(\frac{a_p}{f_p^{n_p}}\right)_q \quad \forall q \in X_{f_p} \subset U$

Al variare di p X_{f_p} coprono tutto $X \to$ trovo $p_1, \dots, p_k$ t.c.

$(f_1, \dots, f_k) = (1) \{ \ X = X_{f_1} \cup \dots \cup X_{f_k}$ e pongo $n = \max_{i=1,\dots,k} n_{p_i}$

Quindi se $q \in X_{f_i} \cap X_{f_j} \Rightarrow \sigma_q = \left(\frac{a_i}{f_i^n}\right)_q = \left(\frac{a_j}{f_j^n}\right)_q$

cioè $\frac{a_i}{f_i^n} = \frac{a_j}{f_j^n}$ in $A_{f_i f_j}$

$\Rightarrow (f_j^n a_i - f_i^n a_j)(f_i f_j)^m = 0 \quad \forall i,j \quad (*)$

Ma allora $(f_1^{n+m}, \dots, f_k^{n+m}) \overset{(\cdot)}{=} A = (1) \to 1 = \sum b_i f_i^{m+n} \quad (\cdot)$

Dico che $a = \sum a_i b_i f_i^m$ è tale che $\varphi(a) = \sigma$ scelto, ovvero:

$\frac{a}{1} = \sigma_q \quad \forall q \in X \to \frac{a}{1} = \left(\frac{a_i}{f_i^n}\right)_q \quad \forall q \in X_{f_i}$

$\Rightarrow$ voglio $\sum a_i b_i f_i^m = \frac{a_i}{f_i^n} \in A_{f_i}$ ovvero che

$0 = \left(f_i^n \sum a_j b_j f_j^m - a_i\right) \iff 0 = \sum f_i^n f_i^m a_j b_j f_j^m - a_i f_i^m$

e da $(*)$ so: $f_j^{n+m} f_i^m a_i = f_i^{n+m} a_j f_j^m$ e quindi trovo

$f_i^m a_i \left(\sum f_j^{n+m} b_j - 1\right) = 0$ che è vero per $(\cdot)$

* MORFISMI DI ANELLI

$\varphi : A \longrightarrow B$ di anelli unitari $\Rightarrow \varphi^* : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$

$p \mapsto \varphi^{-1}(p) = p^c$

① φ^* è <u>continua</u>: $(\varphi^*)^{-1}(V(I)) = \{p \in \operatorname{Spec} B : p^c \in V(I)\}$

$\subseteq$ $I \subset p^c \Rightarrow \varphi(I) \subset \varphi(\varphi^{-1}(p)) = p$

$\supseteq$ $I^e \subset p \Rightarrow \varphi^{-1}(p) \supset \varphi^{-1}(I^e) \supset I$

$= \{p \in \operatorname{Spec} B : I \subset p^c\}$

$= \{p \in \operatorname{Spec} : \varphi^{-1}(p) \supset I\}$

$= \{p \in \operatorname{Spec} B : p \supset I^e = \langle \varphi(I) \rangle_B\}$

$= V(I^e)$

<u>Lemma</u>: $q \in \operatorname{Spec} A$. $q \in \operatorname{Im} \varphi^* \Leftrightarrow q^{ec} = q$

<u>Dim</u>: $(\Rightarrow)$ $q \in \operatorname{Im}\varphi^* \Leftrightarrow q = p^c$ con $p \in \operatorname{Spec} B \Rightarrow q^e \subset p \Rightarrow q \subset q^{ec} \subset p^c = q$

$(\Leftarrow)$ Cerco p : $p^c = q = q^{ec}$: considero

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "q = m^c"'] & B \arrow[d, "m = M^c"] \\ A_q \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & S^{-1}B \end{tikzcd}$$

$S = \varphi(A \setminus q)$

$Q \qquad Q^e \supset M$

e ora $Q = qA_q$ max in A_q.

(Se $Q^{ec} = Q \Rightarrow$ scelgo P primo in A_q : $P \supset Q^{ec} \rightarrow P^c \supset Q$ ma Q max ✓)

2. $Q^e \subset M$ max $\rightarrow M^c = Q$ e $m = (M^c)^c_B$ primo

Dimostriamo che se $Q^e \neq S^{-1}B$ ho finito. Infatti in questo caso $\exists\, M$ t.c. $M \supset Q^e$.

Ma allora $M^c \supset Q^{ec} \supset Q$ ma Q massimale $\rightarrow M^c = Q$

$\rightarrow$ scelgo $m \in B$: $\boxed{m = M^c}$ $\overset{m \text{ primo}}{\Rightarrow}$ $m^c = Q^c = q$ ✓

1. Q^e ideale proprio

Dimostriamo $Q^e \neq S^{-1}B$: $1 \notin Q^e$

Gli el di Q^e sono del tipo $\sum \left(\frac{b_i}{s_i}\right) \varphi\left(\frac{a_i}{t_i}\right) = \frac{x}{\varphi(t)}$ $\quad b_i \in Q$, $s_i \in S$, $a_i \in q$

Se $1 = \frac{x}{\varphi(t)}$ con $x \in q^e$, $t \notin q$ allora

$\varphi(st) = \varphi(s)x \in q^e$

$\varphi(s)(\varphi(t) - x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(r) = y$ con $y \in q^e$, $r \notin q$

cioè $r \in (q^e)^c = q$ assurdo

⚠ In generale non è vero che la contrazione di un ideale massimale è massimale.

<u>ex</u>: Però se $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $T = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ $\quad \overline{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$

Sia $\varphi : S \rightarrow T$ omo di $\mathbb{K}$-alg ($\varphi_{|\mathbb{K}} = id$)

t.c. $\varphi(x_i) = p_i(y_1, \dots, y_m)$ $\forall\, i = 1, \dots, n$

$\rightarrow$ posso costruire $\left[\begin{array}{l} F : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n \\ \quad \beta \mapsto (p_i(\beta))_i \end{array} \right]$

<u>Oss</u>: in questo caso $\forall\, m$ max in T, m^c è max in S.

1) m max in T è tale che $m = m_\beta$ con $\beta \in \mathbb{K}^m$

2) $\varphi^*(m_\beta) = m_{F(\beta)}$

$$\varphi^*(m_\beta) = \{ f \in S : \varphi(f) \in m_\beta \} = \{ f \in S : \varphi(f)(\beta) = 0 \}$$
$$\overset{(*)}{=} \{ f \in S : f(F(\beta)) = 0 \}$$
$$= m_{F(\beta)}$$

$(*)$ $\varphi(f)(\beta) = f(f_1(y), \dots, f_n(y))(\beta) = f(f_1(\beta), \dots, f_n(\beta)) = f(F(\beta))$

ex: $A = S/_{I}$, $B = T/_{J}$ $\qquad$ $\operatorname{Max} A \leftrightarrow \bar V(I)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\operatorname{Max} B \leftrightarrow \bar V(J)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & T \arrow[d] \\ A \arrow[r, "\psi"'] & B \end{tikzcd}$$

con $\varphi(I) \subset J$ e ho $F : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$
$\varphi(x_i) = f_i(y_i)$

$G = F|_{\bar V(J)} : \bar V(J) \to \bar V(I)$

① $F(\bar V(J)) \subset \bar V(I)$

$\beta \in \bar V(J)$: $F(\beta) \in \bar V(I) \iff f(F(\beta)) = 0 \ \forall f \in I$
$\iff \varphi(f)(\beta) = 0 \ \forall f \in I$ che è vero $\varphi(f) \in J$, $\beta \in \bar V(J)$

② $\psi^{-1}(m_\beta/J) = m_{F(\beta)}/I$

ex: $A = \mathbb{C}[x,y]/_{y^2 - x^3}$, $B = \mathbb{C}[z]$ e trovo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[x,y] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{x,\ y}"] & \mathbb{C}[z] \arrow[d, equal, "{z^2,\ z^3}"'] & \rightarrow & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{C}^2 \arrow[d] \\ \frac{\mathbb{C}[x,y]}{y^2 - z^3} \arrow[r] & \mathbb{C}[z] & & \mathbb{C} \arrow[r] & \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_2^2 = \alpha_1^3\} \end{tikzcd}$$

• <u>Estensioni intere</u>

$\varphi : A \to B$ mappa di anelli

<u>Def</u>: diciamo che b è intero su A se $\exists\, a_1, \dots, a_n \in A$ t.c.

$$b^n + \varphi(a_1) b^{n-1} + \dots + \varphi(a_n) = 0$$

I ideale di A : b intero su A se $a_1, \dots, a_n \in I$

ex: $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$: non tutti gli el di $\mathbb{Q}$ sono interi su $\mathbb{Z}$ perché il coef di b^n è 1.

A dominio $\to \mathbb{K} = \mathrm{Quot}(A) \subset L$: cerchiamo gli elementi di L interi su A. $\} = B \supset A$

ex: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{Q}[i]$ $\quad \mathbb{Z}\left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right] \subset \mathbb{Q}[i\sqrt{3}]$

10/07

⚠ Se A non è noetheriano: $\subseteq$: non richiedo che $A[b]$ sia fin gen basta sia contenuto in un fin gen

Prop: $f: A \to B$, $b \in B$, sono equivalenti:

1) b è intero su A
2) $A[b]$ è un A-modulo fin. generato
3) $\exists\, A[b] \subseteq C \subseteq B$ e C anello, fin gen come A-modulo
4) $\exists$ un $A[b]$-modulo fedele che sia fin. generato come A-modulo

Dove: def M si dice R-modulo fedele se $\forall r \overset{\neq 0}{\in} R\ \exists m : rm \neq 0$.

Dim: $(1) \Rightarrow (2)$ So che $\exists n, a_1, \dots, a_n \in A$: $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} b + a_n = 0$

"$A = f(A)$"

$A[b] = \{g(b)$ con $g \in A[x]\}$, dico che è generato come A-modulo da $1, \dots, b^{n-1}$

Basta far vedere che $b^i \in \langle 1, \dots, b^{n-1} \rangle_A$ $\forall i$ per ind su i

P.B: $i \leq n-1$ per ipotesi
P.I: $i \geq n$, se $b^{i-1} \in \langle 1, \dots, b^{n-1} \rangle_A$ allora:

$$0 = b^{i-n}(b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n) = b^i + \underbrace{a_1 b^{n+i-1}}_{\in \langle 1, \dots, b^{n-1} \rangle_A} + \dots + \underbrace{a_n b^{i-n}}_{\in \langle 1, \dots, b^{n-1} \rangle_A}$$

$(2) \Rightarrow (3)$ $C = A[b]$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Scelgo $M = C$. Per ipotesi C è fin gen su A, devo verificare C è un $A[b]$-modulo fedele.

$A[b] \subset C$ anello $\Rightarrow$ C è un $A[b]$-modulo

$\forall\, 0 \neq g \in A[b] \Rightarrow g \cdot 1 = g \in C$, $g \neq 0$

$(4) \Rightarrow (1)$ Sia M un $A[b]$-modulo fedele, fin gen come A-modulo.

Sia $\phi: \underset{m}{M} \to \underset{bm}{M}$ è di $A[b]$-moduli (ma basta A moduli)

$\xrightarrow[\text{C-H}]{}$ $\exists n, a_1, \dots, a_n \in A$ t.c. $\Psi = \phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n I = 0$

$\Rightarrow$ $0 = \Psi(m) = (b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_{n-1} b + a_n) m = 0 \quad \forall m \in M$

Ma M è $A[b]$-modulo fedele $\Rightarrow b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$

Def:
- $A \subset B$ estensione finita se B è A modulo fin. generato.
- $A \subset B$ estensione intera se ogni el di B è intero su A

$+$ $f: A \to B$, estensione finita/intera se lo è B su $f(A)$

Oss: per (3) della Prop: FINITA $\Rightarrow$ INTERA $(\cdot)$

Oss: $A \overset{f}{\subset} B \overset{g}{\subset} C$ e C finita su B, B finito su A $\Rightarrow$ C finita su A
ugualmente

Sia $B = \langle b_1, \dots, b_\beta \rangle_A$ e $C = \langle c_1, \dots, c_\gamma \rangle_B$ $\Rightarrow$ $C = \langle c_i b_j \mid {}^{i \in 1,\dots,\gamma}_{j \in 1,\dots,\beta} \rangle_A$

$\left[c \in C \quad c = \sum_{i=1}^{\gamma} x_i c_i \text{ con } x_i \in B, \ x_i = \sum y_j^{(i)} b_j \quad y_j^{(i)} \in A \to \text{ok} \right]$

Prop: $A \subset B$ (o $f: A \to B$), allora:

1) $b_1, \dots, b_n \in B$ interi su A $\Leftrightarrow$ $A[b_1, \dots, b_n]$ è fin gen su A

2) $\{ b \in B : b \text{ intero su } A \} = \overline{A}^B$ sottoanello di B (chiusura di A in B)

3) $A \subset B$ intera, $B \subset C$ intera $\Rightarrow$ $A \subset C$ è intera

Dim: 1) ($\Leftarrow$) Segue dalla prop precedente prendendo $C = A[b_1, \dots, b_n]$

($\Rightarrow$) Per induzione su n: $A[b_1, \dots, b_{n-1}]$ finito su A
b_n intero su $A \subset A[b_1, \dots, b_{n-1}]$

$\to$ $A \underset{\text{fin}}{\subset} A[b_1, \dots, b_{n-1}] \underset{\text{fin}}{\subseteq} A[b_1, \dots, b_{n-1}, b_n]$ $\to$ finita.

2) b, β interi su A $\Rightarrow$ $b + \beta, -b, b\beta$ interi su A

Ma $b + \beta, -b, b\beta \in A[b_1, \dots, b_n]$ finito su A $\Rightarrow$ intero su A ✓

3) $A \subset B \subset C$, $c \in C$ e voglio dimostrare c intero su A.

$\Rightarrow \exists\, b_1, \dots, b_n \in B$: $c^n + b_1 c^{n-1} + \dots + b_n = 0$, quindi

$A \underset{\substack{\text{fin} \\ (1)}}{\subset} A[b_1, \dots, b_n] \underset{\text{fin}}{\subset} A[b_1, \dots, b_n, c]$ è finita $\Rightarrow$ intero $\Rightarrow$ c intero su A

Prop: $A \subset B$ (o $f: A \to B$), I ideale di A, con B intero su A

$\overline{I}^B = \{ b \in B \text{ interi su } I \} = \sqrt{IB}$

Dim: - Sia $b \in B$ intero su I: $\exists\, a_1, \dots, a_n \in I$: $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$

$\Rightarrow b^n = -a_1 b^{n-1} - \dots - a_n \in IB$ perché gli $a_i \in I$, $b^i \in B$ $\to$ $b \in \sqrt{IB}$

- Voglio dimostrare $b \in \sqrt{IB} \Rightarrow b$ intero su I

1. $b \in IB$
2. Caso 1 $\Rightarrow$ Caso generale.

In fatti se $b \in \sqrt{IB}$ $\Rightarrow$ $\exists\, n : \beta = b^n \in IB$ per qualche n
$\underset{(1)}{\Rightarrow}$ $\exists\, m, a_1, \dots, a_m \in I$: $\beta^m + a_1 \beta^{m-1} + \dots + a_m = 0$
ma quindi anche b soddisfa un'eq a coef in I.

Dimostriamo il caso 1. $b = \sum a_i b_i$ con $a_i \in I$, $b_i \in B$

Scelgo $M = A[b_1, \dots, b_n] \subset B$ è un A-modulo fin. gen
(perché b_i interi su A per ip)

$\phi: M \to M$ di A-moduli, $m \mapsto bm$: $\phi(1) \in IM$, $\phi(b_i) \in IM$ $\forall i$ $\Rightarrow \operatorname{Im} \phi \subset IM$

C-H $\to$ $0 = \psi = \phi^n + \alpha_1 \phi^{n-1} + \dots + \alpha_n$, $\alpha_i \in I$

$x = 1$ $\curvearrowright$ $b^n + \alpha_1 b^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$

ex: $A \subset K$ dominio con $K = \mathrm{Quot}(A)$ e L estensione algebrica di K.
Indico $B = \overline{A}^L$, voglio caratterizzare B.

Dato $x \in L$ considero $\mu_x(t)$ pol min di x su K: se $\mu_x \in A[t] \Longrightarrow x$ intero su A

Quando vale il viceversa?

- Se $x \in K = L \Rightarrow \mu_x(t) = t - x$: quando x intero su $A \Leftrightarrow t - x \in A[t]$ $\Leftrightarrow x \in A$?

Def: A dominio si dice normale (o int. chiuso) se e solo se $\forall x \in K = \mathrm{Quot}(A)$ x intero su $A \Leftrightarrow x \in A$

Oss: Se A è UFD $\Rightarrow$ A normale

dim: $x \in K$ intero su $A \Rightarrow x = y/z$ con $y, z \in A$, $z \neq 0$ primi $(\cdot)$ fra loro.

$\Rightarrow \left(\frac{y}{z}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{z}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{y}{z}\right) + a_n = 0$, $a_i \in A$

$\Rightarrow y^n + a_1 z y^{n-1} + \dots + a_{n-1} z^{n-1} y + a_n z^n = 0$, cioè

(Anelli non normali) $y^n = -z(a_1 y^{n-1} + \dots + a_n z^n) \to z \mid y^n$ ma per $(\cdot) \to z \in A^*$

$(\cdot)$ ex1: $\underbrace{\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^3)}_{A}$ dominio perché $y^2 - x^3$ irriducibile

$\underset{K}{y/x = z}$, $z \notin A$ $\Rightarrow z^2 = y^2/x^2 = x \to 0 = z^2 - x$ $\therefore$ z intero su A

ex2: $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\omega = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ intero ma $\notin A$

$(\cdot)$ Ideali massimali di $A \leftrightarrow \{(\alpha,\beta) : \beta^2 = \alpha^3\}$ $\to$ curva t.c. il 0 ha una singolarità

(Anelli normali non UFD)

ex: $A = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3 + x)$ dominio non UFD normale ($y^2 = x(x-1)(x+1)$) segue dai prossimi fatti

$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è dominio non UFD normale ($6 = 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$)

Prop: $A \subset K \overset{alg}{\subset} L \subset \overline{L}$ con $K = \mathrm{Quot}(A)$, A dominio normale, $x \in L$, I id di A

1) x intero su $A \Leftrightarrow \mu_x \in A[t]$, $\mu_x = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$

2) x intero su $I \Leftrightarrow a_i \in I$ (Dim $\to$ 10.08)

Dim: 1)($\Rightarrow$) $\exists f$ monico t.c. $f \in A[t]$, $f(x) = 0 \Rightarrow \mu_x \mid f$

$\Rightarrow \forall \alpha_i \in \overline{L}$ t.c. $\mu(\alpha_i) = 0 \Rightarrow f(\alpha_i) = 0$
ma quindi α_i intero su A per ogni i.

inoltre $\mu_x = \prod_{i=1}^{N}(t - \alpha_i) = t^n - (\Sigma \alpha_i)t^{n-1} + \dots + (\Pi \alpha_i)(-1)^N$

funzioni simmetriche in α_i ?

$\to$ i coef di μ_x sono INTERI su A e $\in K$ $\underset{A \text{ normale}}{\Longrightarrow}$ i coef di μ_x $\in A$

ex: $A=\mathbb{Z}$, $K=\mathrm{Quot}(\mathbb{Z})=\mathbb{Q}$, $L=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ $d\in\mathbb{Z}$, square-free

Cerco $\overline{A}^{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}=\{x\in L : \mu_x\in A[x]\}$

$x\in L$: $x=a+b\sqrt{d}$: se $b=0 \Rightarrow x\in\mathbb{Q}$: $x\in\overline{A} \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$
altrimenti $b\neq 0$

$\mu_x(t)=(t-x)(t-\overline{x})=t^2-2at+a^2-b^2d\in A[t]$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\simeq \mathrm{Gal}(L/K)$

se e solo se $\begin{cases} 2a\in\mathbb{Z} \\ a^2-b^2d\in\mathbb{Z}\end{cases}$

- $a,b\in\mathbb{Z}$ ok
- $a\notin\mathbb{Z} \to a=\frac{m}{2}$ con $m\in\mathbb{Z}$, $m=2n+1$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}=\begin{cases}\mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{se } d\not\equiv 1(4)\\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right] & \text{se } d\equiv 1(4)\end{cases}$$

<u>Correzione esercizi</u> 10/08

1.5: M piatto $\Rightarrow$ c. $0\to X\to Y\to M\to 0$ esatta, allora:

$0\to N\otimes X\to N\otimes Y\to N\otimes M\to 0$ è esatta

<u>Sol</u>: N si scriverà come $0\to K\to L\to N$ con L libero.

Voglio dimostrare $N\otimes X\to N\otimes Y$ iniettiva

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} & K\otimes X \arrow[r]\arrow[d] & K\otimes Y \arrow[r]\arrow[d] & K\otimes M \arrow[d, hook] \\ 0 \arrow[r] & L\otimes X \arrow[r]\arrow[d] & L\otimes Y \arrow[r]\arrow[d] & L\otimes M \\ & N\otimes X \arrow[r] & N\otimes Y & \end{tikzcd}$$

→ Se A è un ANELLO LOCALE NOETHERIANO
e M è un A-modulo finitamente generato, allora:

$\boxed{M \text{ piatto} \Leftrightarrow M \text{ è libero}}$ ($\Leftrightarrow M$ è proiettivo)

<u>Dim</u>: - M libero $\Rightarrow$ piatto
- M piatto: $\exists!$ $m\subset A$ massimale: $\frac{M}{mM}$ è un $k=\frac{A}{m}$-sp. vett. fin gen

$\Rightarrow$ Sia $\{m_1,\dots,m_n\}$ sollevamento di una base di M/mM a M
per Nak generano M

$\Rightarrow$ $0\to K\to A^n\to M\to 0$ e voglio dimostrare $K=0$

$0\to K\otimes A/m\to A^n\otimes A/m\to M\otimes A/m\to 0$ rimane esatta

$$\begin{array}{ccccc} \cong & & \cong & & \cong \\ K/mK & \longrightarrow & k^n & \xrightarrow{\sim} & M/mM \\ & & e_i & & \overline{m_i}\end{array}$$

$\Rightarrow K=mK$
+ A noether, K fin gen
$\xrightarrow{\text{Nak}} K=0$.

1.2 : $S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$ per M fin. presentato

(Def. M si dice finitamente presentato se $A^b \to A^a \to M \to 0$, $a,b \in \mathbb{N}$)

↳ · A noeth + M fin gen $\Rightarrow$ M fin. pres

· $A = \mathbb{K}[x_i \mid i \in \mathbb{N}]$ e $M = \mathbb{K} = A/(x_i \mid i \in \mathbb{N})$ non è fin. presentato ma è fin generato

Sol: $A^b \to A^a \to M \to 0$, da cui trovo $0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(A^a,N) \to \mathrm{Hom}(A^b,N)$ ex e localizzando trovo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & S^{-1}\mathrm{Hom}(M,N) & \to & S^{-1}\mathrm{Hom}(A^a,N) & \to & S^{-1}\mathrm{Hom}(A^b,N) & \to 0 \\ & \downarrow j & & \wr\wr & & \wr\wr & \\ 0 \to & \mathrm{Hom}(S^{-1}M, S^{-1}N) & \to & \mathrm{Hom}(S^{-1}A^a, S^{-1}N) & \to & \mathrm{Hom}(S^{-1}A^b, S^{-1}N) & \end{array}$$

dove la mappa $j(\varphi/s)\left(\frac{m}{t}\right) = \frac{\varphi(m)}{st}$ + lemma dei 5

1. : $f : \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ t.c. $f(e_i) = 0\ \forall i \Rightarrow f \equiv 0$

Sol: Supponiamo per assurdo che f non sia 0: $\underbrace{\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}}_{=A} \cong \ker f \oplus \underset{\langle z \rangle}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}}}$

- Sia $\underset{\hat{A}}{a}$ t.c. $\underset{\forall k}{\hat{}}\ 2^k \mid a_n$ def $\Rightarrow f(a) \neq 0 \Rightarrow a = nz + c$ $c \in \ker f$

Considero $k \in \mathbb{N}$ t.c. $2^k \nmid n f(z) \Rightarrow \exists n_0 : 2^k \mid a_n\ \forall n \geq n_0$

Se considero b t.c. $b_i = \begin{cases} 0 & i < n_0 \\ a_i & i \geq n_0 \end{cases} \Rightarrow f(b) = f(a)$ $(f(e_i) = 0)$

$\to b = nz + c'$ perché $f(a) = f(b)$

$\to 2^k f(b/2^k) = f(b) = n f(z)$ ma $2^k \nmid n f(z)$ $\to f(a) = 0$

- Scelgo b t.c. $3^n \mid b_n\ \forall n \Rightarrow f(b) = 0$

$\Rightarrow a = (2^n \alpha_n)$, $= (3^n \beta_n)$ $z = (2^n \alpha_n + 3^n \beta_n) = a + b \to f(z) = 0$.

Es (ieri):

$a \in \mathbb{Z} \to b^2 d \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ $d \equiv 1\ (4)$

$a \notin \mathbb{Z}$: $a = \frac{2n+1}{2} \to a + b\sqrt{d} \in$

A dominio ~~normale~~, $K = \mathrm{Quot}(A)$, $K \subset L$. $B = \overline{A}^L$

<u>Prop</u>: 1) L è il campo di quozienti di B
2) B è normale

<u>Dim</u>: 1) Dimostriamo che $x \in L \Rightarrow \exists a \in A : ax \in B$

Sia $\mu_x(t) = t^n + \frac{a_1}{c} t^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{c}$ pol min di x su K, $a_i \in A$, $c \in A$

$\Rightarrow (cx)^n + a_1 c (xc)^{n-1} + \dots + a_n c^{n-1} = 0$

quindi $cx \in B$.

2) $x \in L = \mathrm{Quot}(B)$, x intero su $B \Rightarrow x$ intero su $A \rightarrow x \in B$

(questo dimostra $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \overline{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$ è normale)

<u>Prop</u>: A <u>normale</u>, I ideale di A, $K = \mathrm{Quot}(A)$, $A \subset K \overset{alg}{\subset} L$

x intero su $I \iff \mu_x = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ e $a_i \in \sqrt{I}$ $\forall i$

<u>Dim</u>: • $a_i \in \sqrt{I} \Rightarrow x^n = -a_1 x^{n-1} - \dots - a_n \in \sqrt{I^e}_{A[x]} \Rightarrow x$ intero su I

• $\exists f$ monico t.c. $f(t) = t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_n$, $b_i \in I$
$f(x) = 0$

$\Rightarrow \mu_x \mid f$ e $\forall \alpha_i \in \overline{K}$: $\mu_x(\alpha_i) = 0 \rightarrow f(\alpha_i) = 0$

Ma allora α_i intero su I, $\alpha_i \in \sqrt{I^e}$
e come ~~xxx~~ cui i coef di μ_x, a_i sono $\mathrm{sym}(\alpha_i) \in \sqrt{I^e} \cap K$

$\rightarrow a_i$ sono interi su I $\rightarrow a_i \in A$ interi su I
x intero su $I \Rightarrow x$ intero su A + A normale $\quad a_i \in \sqrt{I}$

<u>Lemma</u>: $A \subset B$ ($\circ\ f: A \to B$), allora:

1. Se $A \subset B$ è intera, I id di A, J id di B $\Rightarrow \frac{A}{I} \xrightarrow{\pi} \frac{B}{J}$ intera
$I^e \subset J$

$\bar{b} \in B/J$, $b \in B$: b intero su A: $b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$
e al quoziente: $\bar{b}^n + \pi(\bar{a}_1) \bar{b}^{n-1} + \dots + \pi(\bar{a}_n) = 0$

2. Se $S \subset A$ una parte moltiplicativa, B intero su $A \Rightarrow S^{-1}A \subset S^{-1}B$ è intera

$\frac{b}{s} \in S^{-1}B$: $b \in B \rightarrow b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$
$\Rightarrow \left(\frac{b}{s}\right)^n + \frac{a_1}{s}\left(\frac{b}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s^n} = 0 \quad \frac{a_i}{s} \in S^{-1}A$

3. $S^{-1}\overline{A}^B = \overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B}$ (es per Mon 15)

$A \to B$ intera, vogliamo studiare la mappa $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

Lemma: $A \subseteq B$ e A, B domini, estensione intera, allora:

$$\boxed{A \text{ campo} \iff B \text{ campo}}$$

Dim: • A campo, $b \in B \Rightarrow A[b]$ è un campo: $\frac{1}{b} \in A[b] \subset B$
b algebrico
$b^{-1} = -a_n^{-1}(b^{n-1} + a_1 b^{n-2} + \dots + a_{n-1})$

• $a \in A$, $a \neq 0$: $\frac{1}{a} \in A$?

Sicuramente $\frac{1}{a} = b \in B \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0$ $a_i \in A$
$\times a^{n-1}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right) = -a_1 - a_2 a - \dots - a_n a^{n-1} \in A$

Cor: $f: A \to B$ intera, $p, q \in \operatorname{Spec} B$. Allora:

- p max in $B \Rightarrow p^c$ max in A
- $q \supset p$ e $q^c = p^c \Rightarrow q = p$

Dim: • Vale $A/_{p^c} \hookrightarrow B/_p$ $\quad (p^c = \ker(A \twoheadrightarrow B/_p))$ + lemma

• $q \supset p$ e $q^c = p^c = r$: $\quad A/_{p^c} \subset B/_p \quad \to$ Ci riduciamo al caso $p = 0$

$\qquad \Vert \qquad\qquad \downarrow$

$\qquad A/_{p^c} \subset B/_q \quad (\bar{A} = A/_{p^c}, \bar{B} = B/_p, \bar{p} = 0, \bar{q} = q/_p)$

$A_r \subseteq B_r$ intera
Sia $m = S^{-1}r$ max in A_r
$n = S^{-1}p$, $n' = S^{-1}q$ in B_r
$\to n^c = n'^c = m$ max
$\to n \subseteq n'$ max
sono uguali

So che $q^c = 0$, $A \subset B$ dominio. Localizzo $S = A \setminus \{0\}$

$\Rightarrow S^{-1}A \subset S^{-1}B \to S^{-1}B$ è un campo: $S^{-1}q = 0$
$S^{-1}A$ campo $\qquad \Rightarrow q = (S^{-1}q)^c = 0$

Prop [Lying over] $A \subset B$ intera: $\forall p \in \operatorname{Spec} A \ \exists q \in \operatorname{Spec} B : q^c = p$

$\Rightarrow \operatorname{Spec} B \twoheadrightarrow \operatorname{Spec} A$

Dim: $S = A \setminus p$ e consideriamo $\underbrace{S^{-1}A}$ $\to S^{-1}B$
anello locale con ideale max $S^{-1}p$

Se $S^{-1}B \neq 0$: allora scelgo $m \in \operatorname{Max} S^{-1}B$: [[m^c max in $S^{-1}A$]]
$\to m^c = p$

$$\begin{tikzcd} p \quad A \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & B \quad q = m^c \arrow[d] \\ S^{-1}A \arrow[r] & S^{-1}B \end{tikzcd} \Rightarrow q^c = p$$

$S^{-1}p = m^c \qquad m$

$\frac{1}{1} \neq 0$

Ora: se $S^{-1}B = 0$: $\exists s \in A \setminus p$ t.c. $s = 0$ ma $A \hookrightarrow B$
e quindi $0 \notin$ Immagine di S in B.

Oss: Se $A \xrightarrow{f} B$ non iniettiva, è falso: $I = \ker f$:

$\forall q \in \operatorname{Spec} B \quad q^c \supset I \Rightarrow \operatorname{Spec} C \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Spec} A$

$\operatorname{Im} \varphi \subset V(I)$

Prop: $f: A \to B$ intera. Allora: $\varphi: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

1) $\varphi(V(J)) = V(J^c)$
2) φ è chiusa

Dim: 1) $\Rightarrow$ 2)

- Dimostriamo 1). $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$: $q \supset J \Rightarrow q^c \supset J^c$ quindi $\subseteq$

Sia $p \in V(J^c)$: $p \supset J^c$, allora:

$$A/_{J^c} \subset B/_J \text{ intera} \xrightarrow[\text{over}]{\text{Lying}} \exists\, q \supset J \text{ t.c. } q^c = p$$

$$\bar{p} = p/_{J^c} \subset A/_{J^c}$$

Def: X sp. topologico diciamo: 10/10

x è una specializzazione di y se $x \in \overline{\{y\}}$

$Y \subset X$ è chiuso per specializzazione se: $y \in Y \Rightarrow \overline{\{y\}} \subset Y$

Oss: - Y chiuso $\Rightarrow$ Y chiuso per spec.
- $f: A \to B$, $\varphi: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ chiusa per $\uparrow$

Prop: Se $f: A \to B$ t.c. φ chiusa $\Rightarrow \forall\, p_1 \subset p_2 \subset A$, con $p_i \in \operatorname{Spec} A$, $q_1 \subset B$, $q_1 \in \operatorname{Spec} B$ t.c. $q_1^c = p_1$ $\Rightarrow \exists\, q_2 \supset q_1$ primo : $q_2^c = p_2$

$$\begin{array}{ccccc} p_1 & \subset & p_2 & \subset & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ q_1 & \subset & q_2 & \subset & B \end{array}$$

Dim: $\varphi(V(q_1))$ è un chiuso e $p_1 \in \varphi(V(q_1))$, $p_1 = \varphi(q_1)$

$\Rightarrow p_2 \in \overline{\{p_1\}} \subset \varphi(V(q_1)) \Rightarrow \exists\, q_2 \supset q_1 : q_2^c = p_2$.

Def: Data $f: A \to B$ diciamo che f soddisfa il going up se

$$\begin{array}{ccccc} p_1 & \subset & p_2 & \subset & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ q_1 & \subset & q_2 & \subset & B \end{array}$$

$\forall\, p_1, p_2 \in \operatorname{Spec} A$, $q_1 \in \operatorname{Spec} B$ t.c. $q_1^c = p_1$ $\Rightarrow \exists\, q_2 \supset q_1$ t.c. $q_2^c = p_2$

ex: Non è vero che chiusa $\Rightarrow$ intera ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}(x)$)

Prop: $f: A \to B$, $\varphi: \underbrace{\operatorname{Spec} B}_{= X} \to \underbrace{\operatorname{Spec} A}_{= Y}$, allora:

1. $\varphi(X)$ chiuso $\Leftrightarrow$ $\varphi(X)$ è chiuso per spec.
2. φ è chiusa $\Leftrightarrow$ f soddisfa il G.U.

Dim: 1) ($\Rightarrow$) ovvio
($\Leftarrow$) Sia $p \in \overline{\varphi(X)}$ e vogliamo dimostrare che $p \in \varphi(X)$

$\forall\, a$ se $p \in Y_a \Rightarrow Y_a \cap \varphi(X) \neq \emptyset$ ovvero

$\forall\, a \in A \setminus p$ $\exists\, p_a \in \varphi(X)$ e $a \notin p_a$ cioè $\exists\, q_a \in X$ e $a \notin q_a^c$

$f(a) \notin q_a$

ovvero $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & B_{f(a)} \end{tikzcd}$ vale che $B_{f(a)} \neq 0 \quad \forall a \in A - p$

Se $S = A - p$, $T = f(S)$: $T^{-1}B \neq 0$: se $1 = 0$ ovvero che $\exists s$: $f^n(s) = 0$, $s \in p$ $\rightarrow B_{f(s)} = 0$

$\Rightarrow \exists\, Q$ primo di $T^{-1}B$ $\quad p = Q^c$ in B

Allora guardo $Q^c = p'$ con $p' \subset p$ e $\varphi(X) \ni p'$

Ma quindi $p \in \overline{\{p'\}}$ e $\varphi(X)$ chiuso per spec $\Rightarrow p \in \varphi(X)$

2. φ chiuso $\Leftarrow$ f soddisfa il going up

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $V(I) \in \operatorname{Spec} B \Rightarrow$ voglio $\varphi(V(I))$ chiuso

Vale : $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/I^c \arrow[r, "g"] & B/I \end{tikzcd}$ So che $\varphi(V(I)) \subset V(I)^c$

Considero g e ψ : $\operatorname{Spec} B/I \rightarrow \operatorname{Spec} A/I$

e $\psi(\operatorname{Spec} B/I) = \varphi(V(I))$

Osservo che ~~anche g soddisfa il gu~~ e voglio dimostrare che $\psi(\operatorname{Spec} B/I)$ è chiusa.

$\rightarrow$ mi riduco a $I = 0$ e cerco di dimostrare $\varphi(X)$ chiuso.

Basta $\varphi(X)$ chiuso per spec: $p \in \varphi(X)$ cioè $\exists\, q \in \operatorname{Spec} B$ t.c. $q^c = p$

$\Rightarrow \forall p' \supset p$: trovo $q' \supseteq q$ t.c. $(q')^c = p'$ per il gu $\rightarrow \overline{\{p\}} \subset \varphi(X)$.

$\forall p' \in V(p)$ $\qquad \Rightarrow p' \in \varphi(X)$

Prop : $A \subset B$ con A e B domini e A normale, $A \subset B$ intero

$\Rightarrow \varphi : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ è aperta

ex: $\mathbb{C}[x] \subset \underset{x = y^2}{\mathbb{C}[x,y]} = \mathbb{C}[y]$ allora: $f(x) = y^2$ + qualche commento

Dim : $\varphi : X \rightarrow Y$ con $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec} A$. Dimostro $\varphi(X_b)$ aperto $\forall b$

A dominio normale: $\mu_b(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n \quad a_i \in A$

$\rightarrow$ voglio dimostrare che $\varphi(X_b) = \bigcup_{i=1}^{n} Y_{a_i}$

$(\subseteq)$ $q \in X$: $b \notin q$ allora sia $p = q^c \in \operatorname{Spec} A$: se $p \notin Y_{a_i} \Rightarrow a_i \in p$

Ma allora se $p \notin \bigcup Y_{a_i} \Rightarrow a_i \in p \;\forall i \Rightarrow b \in \sqrt{p} \subset \sqrt{q} = q$ ass.
b intero su p

(2) Sia $p \in V(a)$ e voglio dimostrare che $\exists\, q \in \operatorname{Spec} B : b \notin q,\ q^c = p$

Sia ora $S = A - p$: $S^{-1}A \subset S^{-1}B$ e $S^{-1}p$ ideale max in $S^{-1}A$

Inoltre:

- $S^{-1}A$ è normale (es per casa)
- $S^{-1}B \supset S^{-1}A$ estensione <u>intera</u>

Ma allora $\forall q \in Max(S^{-1}B)$: $q^c \subset S^{-1}p$, voglio anche $b \notin q$.

Supponiamo che $\forall m \in Max(S^{-1}B)$, $b \in m$ cioè:

$$b \in \bigcap_{Max(S^{-1}B)} m = \bigcap_{\substack{q \in Spec(S^{-1}B) \\ (\circ)\ q \supset S^{-1}p}} q = \sqrt{(S^{-1}p)^e} \to b \text{ intero su } S^{-1}p$$

$(\circ)$ q primo t.c. $q \supset S^{-1}p$ $\Rightarrow$ q^c max $\Rightarrow$ q max

Ma $a_i \in S$ $\forall i$ quindi $a_i \notin S^{-1}p \longrightarrow$

$S^{-1}A$ normale, b intero su $S^{-1}p$ ⇒ i coef di p_x sono in $S^{-1}p$

$b \notin S^{-1}p \leftarrow$

ex: $A = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{y^2 = x^3}$ dominio, ma non è normale : y/x intero su A

$\Rightarrow$ si chiama normalizzazione di un dominio A, $\overline{A}^{Quot(A)}$

Consideriamo $\varphi : \frac{\mathbb{C}[x,y]}{y^2=x^3} \longrightarrow \mathbb{C}[t]$ ben def, iniettiva

$y \mapsto t^3$

$x \mapsto t^2$

$\left(A = \{a(x) + y\, b(x)\} : \varphi(a(x) + y\, b(x)) = \overbrace{a(t^2)}^{\text{pot pari}} + \overbrace{t^3 b(t^2)}^{\text{pot dispari}} = 0 \text{ se e solo se } a = 0,\ b = 0 \right)$

Dimostriamo che φ è intera:

se considero i polinomi $f(z) = z^2 - x$, $g(z) = z^3 - y$ $\in A[z]$

$\Rightarrow f(t) = g(t) = 0$ ma $f \neq g$ → non si può parlare di pol. min se anello non normal

$\Rightarrow A \subset B \subset Quot(A)$ e $t = y/x$

Ora:
- B è normale
- B intero su A
- $B \subset Quot(A) = K$

$\Rightarrow B = \overline{A}^K$

ex: $A = \frac{\mathbb{C}[x,y]}{y^2 = x^3 + x^2} \longrightarrow \mathbb{C}[t]$
- ben def
- iniettiva
- $t = y/x$

$x \mapsto t^2 - 1$

$y \mapsto t^3 - t$

e come prima $\Rightarrow B = \overline{A}^K$

Ora $Max A = \{(\alpha, \beta) : \beta^2 = \alpha^3 + \alpha^2\}$: $\varphi : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$

$m_c \mapsto m_{(c^2-1,\ c^2+c)}$

Guardiamo: $A = \dfrac{\mathbb{C}[x,y,z]}{y^2 = x^3 + x^2} \xrightarrow{t = y/x} \mathbb{C}[t,z]$ in questo caso:

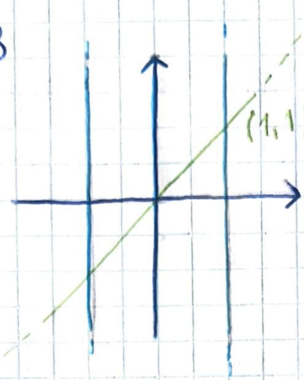
$$x \mapsto t^2 - 1$$
$$y \mapsto t^3 - t$$
$$z \mapsto z$$

In questo caso:

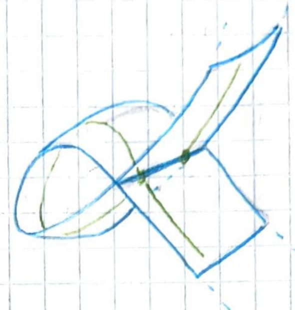
- A, B domini
- $A \subset B$ intera
- A non è normale

Voglio dimostrare $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ non è aperta

Max B



Max A



Sia $f = z - t$ e voglio dimostrare che $\varphi(X_f)$ non è aperto.

1. $m_{(0,0,1)} \in \varphi(X_f)$
2. $\nexists$ intorno aperto di $m_{(0,0,1)} \subset \varphi(X_f)$

Ora gli intorni di $m_{(0,0,1)}$ sono $Y_g \ni m_{(0,0,1)} \Rightarrow g(0,0,1) \neq 0$

$\Rightarrow g(\underbrace{\varepsilon^2+2\varepsilon, \varepsilon^3+3\varepsilon^2+2\varepsilon, 1+\varepsilon}_{P(\varepsilon)}) \neq 0$ per ε piccolo (polinomio)

ma se $Y_g \subset \varphi(X_f) \Rightarrow m_{P(\varepsilon)} \in \varphi(X_f)$ che non è vero (°)

(°) $m_{P(\varepsilon)} \neq p^c \quad \forall p \in X_f$: se così non fosse avrei un $p^c = m_{P(\varepsilon)}$; con $A \subset B$ intero $\Rightarrow p \in \mathrm{Max}(B)$

cioè $p = m_{(c,d)}$ e $\varphi(m_{(c,d)}) = m_{(c^2-1, c^3-c, d)} = m_{P(\varepsilon)}$:

$\Rightarrow$ ovvero avrei
$$d = 1+\varepsilon$$
$$c^2 - 1 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon$$
$$c^3 - c = \varepsilon^3 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon = (\varepsilon^2+2\varepsilon)(\varepsilon+1) = (c^2-1)(\varepsilon+1)$$

$\to$ poiché per ε piccolo è tutto $\neq 0$: $c = 1+\varepsilon$, $d = 1+\varepsilon$ ma $(c,d) \in f$

10/11

Def: diciamo che $f: A \to B$ soddisfa il going down se $\forall\, p_1 \subset p_2 \in \mathrm{Spec}\, A$, $q_2 \in \mathrm{Spec}\, B : q_2^c = p_2$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} p_1 & \subset & p_2 & \subset & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ q_1 & \subset & q_2 & \subset & B \end{array}$$

allora $\exists\, q_1 \in \mathrm{Spec}\, B$, $q_1 \subset q_2$ t.c. $q_1^c = p_1$

Lemma: $f : A \to B$, $\varphi : X = \operatorname{Spec} B \to Y = \operatorname{Spec} A$, allora:

1) $X_q = \bigcap_{\alpha \notin q} X_\alpha$

$X_q = \{p \subset q\} \leftrightarrow \operatorname{Spec} B_q$
$X_\alpha = \{q : q \not\ni \alpha\} \leftrightarrow \operatorname{Spec} B_\alpha$

2) $\varphi(X_q) = \bigcap_{\alpha \notin q} \varphi(X_\alpha)$

Dim: 1) $p \subset q \Rightarrow p \in X_\alpha \ \forall \alpha \notin q$ ✓

$p \in X_\alpha \ \forall \alpha \notin q \Rightarrow p \subset q$ ✓

2) $\varphi(X_q) \subseteq \bigcap_{\alpha \notin q} \varphi(X_\alpha)$

Infatti $\varphi(X_q) = \varphi\left(\bigcap_{\alpha \notin q} X_\alpha\right) \subseteq \bigcap_{\alpha \notin q} \varphi(X_\alpha)$

Sia $p \in \bigcap_{\alpha \notin q} \varphi(X_\alpha)$: $\forall \alpha \notin q \ \exists q_\alpha \in X_\alpha : q_\alpha^c = p$

$\Rightarrow \forall \alpha \notin q : p^e \subset q_\alpha$ e $\alpha \notin q_\alpha$: $\alpha \notin p^e \ \forall \alpha \notin q$
$\to p^e \subset q \subset B$

Localizzo in $S = B \setminus q$: $S^{-1}p^e \subset S^{-1}q \subset A_q$

Dimostro $\boxed{\tilde{f}^{-1}(S^{-1}p^e) = p}$ con $\tilde{f} : A \to S^{-1}B$ (·)

p^{ec} rispetto a $\tilde{f}$ — in generale non è detto p^e primo

Se lo dimostro: $\exists Q' \subset S^{-1}q : (Q')^c = p$

e $Q' \cap B = q' \in X_q$ e $\varphi(q') = p$.

Vediamo (·): $a \in A$, $\tilde{f}(a) = y/\beta$ con $y \in p^e$, $\beta \notin q$

$\to \gamma \beta \tilde{f}(a) = \gamma y$ per qualche $\gamma \notin q$, a meno di $\beta \to \gamma\beta$, $y \to \gamma y$

suppongo $\beta \tilde{f}(a) = y$ e $\beta \notin q$: $\exists q_\beta$ t.c. $q_\beta^c = p$

$y \in p^e \subset q_\beta$

Ma allora $\tilde{f}(a) \in q_\beta$ (perché $\beta \notin q_\beta$) $\to a \in q_\beta^c = p$

$\Rightarrow p^{ec} = p$ e tesi

$A \to B \to B_q$ (composizione $\tilde{f}$)

$p \quad p^e \quad S^{-1}p^e \subset S^{-1}q$

$p \in \varphi(X_q)$ sse $p \in \tilde{\varphi}(\tilde{X})$ sse $p^{ec}_{\tilde{f}} = p$

sse $\tilde{f}^{-1}(S^{-1}p^e) = p$

$A \to B \to B_q$

$a \quad f(a) \quad \frac{f(a)}{1} = \frac{y}{\beta}$

$\to \beta f(a) = y \in p^e$

$\beta \notin q : \exists q_\beta^c = p$, $q_\beta \subset \operatorname{Spec} B$

$f(a) \in q_\beta \to a \in q_\beta^c = p$

Prop: $f : A \to B$, $\varphi : X \to Y$ fra gli spettri. Allora:

φ aperta $\Rightarrow$ f soddisfa il g.d.

Dim: Sia $p_1 \subset p_2 \subset A$ con $q_2^c = p_2$: voglio $p_1 \in \varphi(X_{q_2}) = \bigcap_{\alpha \notin q_2} \varphi(X_\alpha)$

$$\begin{array}{ccc} p_2 & \subset & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ q_2 & \subset & B \end{array}$$

- φ aperta $\Rightarrow$ $\varphi(X_\alpha)$ aperto $\forall \alpha$
- $q_2^c = p_2$ $\Rightarrow$ $p_2 \in \varphi(X_\alpha) \ \forall \alpha \notin q_2$

Se $p_1 \notin \varphi(X_\alpha) \Rightarrow V(p_1) \cap \varphi(X_\alpha) = \emptyset$ ma $p_2 \in V(p_1)$ → assurdo

$\Rightarrow p_1 \in \varphi(X_\alpha) \ \forall \alpha \rightarrow p_1 \in \varphi(X_{q_2})$.

Cor: $A \subset B$ (intera), domini, A normale $\Rightarrow$ vale il going down.

es: $f: A \to B$ piatta $\Rightarrow$ vale il g.d. (B piatto come A-modulo)

ex: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: vale il going down, infatti: $(p_1) \subset (p_2) \subset \mathbb{Z}$ ✓

$$\begin{array}{ccccc} (p_1) & \subset & (p_2) & \subset & \mathbb{Z} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ (0) & \subset & (0) & \subset & \mathbb{Q} \end{array}$$

ma

$$\varphi: \underset{(0)}{\{(0)\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}} \longrightarrow \underset{(0)}{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}$$ mentre $\{0\}$ non è aperto di $\mathbb{Z}$.

Gli aperti di $\mathbb{Z}$ sono $X_n = \{p : n \notin p\} = \{p : p \nmid n\}$

Problema: $\mathbb{Q}$ non è una $\mathbb{Z}$-alg finitamente generata

Teo $f: A \to B$ t.c.
1) Vale il g.d.
2) A, B noetheriani
3) B è una A-algebra fin. generata ($\exists\, b_1, \dots, b_n : B = f(A)[b_1, \dots, b_n]$)

$\Rightarrow \varphi: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è aperta

• **Dimensione**:

A anello: $\dim A = \sup\{n : p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_n \subset A,\ p_i \text{ primi}\}$

⚠ anche se A noetheriano, non è detto $\dim A < +\infty$

Oss: A noetheriano di dim 0 sono gli ANELLI ARTINIANI

In questo caso, A è t.c. $|\operatorname{Spec} A| < +\infty$, $\operatorname{Spec} A = \operatorname{Max} A = \{m_1, \dots, m_k\}$

$\Rightarrow A \xrightarrow{\sim} A_{m_1} \times \cdots \times A_{m_k}$ è un isomorfismo

Prop: Se $A \subset B$ intera $\Rightarrow \boxed{\dim A = \dim B}$ (lying over)

Dim: - Se considero $q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n \subsetneq B$, $q_i \in \operatorname{Spec} B$, allora

sono distinti perché $A \subset B$ intera

$q_0^c \subsetneq q_1^c \subsetneq \cdots \subsetneq q_n^c \subsetneq A$ è una successione di id primi di A

$\Rightarrow \dim A \geq \dim B$

- Data

$$\begin{array}{ccccccc} p_0 & \subsetneq & p_1 & \subsetneq \cdots \subsetneq & p_n & \subsetneq & A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ q_0 & \subsetneq & q_1 & \subsetneq \cdots \subsetneq & q_n & \subsetneq & B \end{array}$$

$A \subset B$ intera $\Rightarrow$ trovo $q_0 : q_0^c = p_0$; vale g.u.

successione in B

distinti perché hanno contrazioni che sono primi distinti

Prop: Se $A \subset B$ finita, allora: (A noetheriano)

$\forall p \in \mathrm{Spec} A$: $\# \underbrace{\{q : q^c = p\}}_{X_p} < +\infty$ (cioè la mappa $\varphi : X \to Y$ è a fibre finite).

Oss:
$$\begin{array}{ccc} X_p & \subset & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ p & \in & Y \end{array}$$
$\forall f : A \to B$

$A \longrightarrow \left(\frac{A}{p}\right)_p = k(p)$ detto campo residuo

$\Rightarrow \mathrm{Spec}(k(p)) \longrightarrow \mathrm{Spec} A$

$0 \longmapsto p$

Se cerco $\{q \subset B$ t.c. $q^c = p\} = X_p \leftrightarrow \mathrm{Spec}\left(\underbrace{\left(\frac{B}{p^e}\right)_p}_{B \otimes_A k(p)}\right)$

Infatti $\forall Q \in \mathrm{Spec}\left(\left(B/p^e\right)_p\right)$: $\begin{cases} Q \cap B = q \supset p^e \\ q \cap f(A \setminus p) = \emptyset \end{cases}$

$\Rightarrow q^c \supset p$, $q^c \cap (A \setminus p) = \emptyset \Rightarrow q^c = p$.

Dim: Se in particolare $A \subset B$ finita, A (e quindi B) noetheriani,

$A \subset B$ finita $\Rightarrow A/p \subset B/p^e$ finita $\Rightarrow \underbrace{(A/p)_p}_{\dim 0 \ \boxed{k(p)}} \subset (B/p^e)_p$ fin.

$\boxed{k(p)} \subset B \otimes_A k(p)$

$\Rightarrow B \otimes_A k(p)$ è - noeth
- $\dim = 0$ (per prop)

$\rightarrow$ è artiniano $\Rightarrow |X_p| = |\mathrm{Spec}(B \otimes_A k(p))| < +\infty$.

- A noetheriano di dimensione 1

ex: K campo, $\overset{v}{\text{val}} : K^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ t.c. $v(xy) = v(x) + v(y)$ $(*)$
$v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$

$\rightarrow$ A dominio UFD: $v_p(f) = \max\{n : p^n \mid f\}$, $v_p(f/g) = v_p(f) - v_p(g)$ rispetta le proprietà r.

Diciamo che la valutazione v è discreta se $\mathrm{Im}\, v = \mathbb{Z} \cdot q$ $(q \neq 0)$

Sia $A = \{a \in K : a = 0$ o $v(a) \geq 0\} \supset m = \{a \in K : a = 0$ o $v(a) > 0\}$

$\rightarrow v_2$ su $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$: $A = \{\frac{a}{b} : 2 \nmid b\} = \mathbb{Z}_{(2)}$

A costruito così si dice di valutazione discreta

Prop: A di valutazione discreta, allora:

1) A è un anello locale con ideale massimale m
2) m principale
3) A normale
4) $\dim A = 1$

} A (noetheriano +) PID

Dim: - Osserviamo che : $v(x) = v(1) + v(x)$ $\forall x \rightarrow v(1) = 0$: $1 \in A$
- A chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$ (per le proprietà $(*)$)
- m ideale di A e $\forall x \notin m$: $v(x) = 0 \Rightarrow v(x^{-1}) = 0$, $x^{-1} \in A$.

Vogliamo dimostrare che A è PID (Non abbiamo ancora usato v discreta!)

Assumiamo $\operatorname{Im} v = \mathbb{Z}$:

dato J ideale di A $\{v(j) : j \in J\}$ e sia $n = \min\{v(j)\}$

Voglio dire: $J \subseteq \{x : v(x) \geq n\} = (x)$ se $v(x) = n$

Sia x t.c. $v(x) = n$: $(x) \subset J \subset \{x : v(x) \geq n\} \subseteq (x)$

dato y : $v(y) \geq n \Rightarrow v(y/x) \geq 0$: $y/x \in A$: $y = (\frac{y}{x}) x \in (x)$

$\Rightarrow$ A è PID : in particolare

- $v(x_0) = 1 \Rightarrow (x_0) = m$
- A PID $\Rightarrow$ normale e $\dim A = 1$

Teo: A locale noetheriano, sono fatti equivalenti

1) A dominio di valutazione discreta
2) A dominio normale (e $\dim A = 1$) non serve
3) m ideale massimale è principale (e $\dim A \geq 1$)

(Dim: vedi → 10.15)

ex: Sia $A = \mathbb{C}[x,y]/(f)$ con f irriducibile : quando è normale?

A normale $\Leftrightarrow$ $\{f = 0\}$ è una curva liscia

Sappiamo Max $A \leftrightarrow \{(\alpha,\beta) : f(\alpha,\beta) = 0\}$:

Def: f liscia se $\forall P \in \{(\alpha,\beta) : f(\alpha,\beta) = 0\}$: $df : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $df(P) \neq 0$

① A normale $\Leftrightarrow$ A_m normale $\forall$ m max

② Sia $m = m_{(\alpha,\beta)}$ l'ideale max e supponiamo $(\alpha,\beta) = (0,0)$: $f(0,0) = 0$

cioè $f(x,y) = ax + by + \dots$

A_m normale : lo teo equivale a dire: $\left(\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(f)}\right)_{(x,y)}$ normale $\Leftrightarrow$ $b \neq 0$ o $a \neq 0$

(·) Dimostriamo: m principale $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ o $b \neq 0$

questo concluderebbe per PROP 1 + TEO se sapessi: $\dim\left(\frac{\mathbb{C}[x,y]}{(f)}\right) = 1$.

- A dominio, $\dim A \geq 1$: $0 = \frac{(f)}{(f)} \subset \frac{(x,y)}{(f)} \subset A$

(·) $\dim_{A/m} \frac{m}{m^2}$ = minimo numero di generatori di m in A.

con $m = \frac{(x,y)}{(f)} \rightarrow \frac{m}{m^2} = \frac{(x,y)}{(x,y)^2 + (f)} = \frac{(x,y)}{(x^2, xy, y^2, ax+by)}$

che ha dimensione 1 quando uno fra a e b è $\neq 0$

Dim: Sappiamo 1) $\Rightarrow$ 2), 3)

(3) $\Rightarrow$ (1) • $\boxed{A \text{ dominio} + \dim A = 1}$

So che $\dim A \geq 1$ + A locale : $\exists\, \mathfrak{p} \subsetneq m$ primo.

Sia $y \in \mathfrak{p} \subsetneq (x) \Rightarrow \exists\, a \in A : ax = y \in \mathfrak{p} \to a \in \mathfrak{p}$ $\quad \mathfrak{p} \subset x\mathfrak{p}$
d'altra parte l'altra inclusione è ovvia, quindi

$\Rightarrow m\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ e A locale noeth. $\overset{\text{Nak}}{\Rightarrow}$ $\mathfrak{p} = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A \text{ dominio} \\ \dim A = 1 \end{cases}$

• $\forall y \in A, y \neq 0$, sia $\left(v(y) = \max\{n : x^n \mid y\} \right)$ $\to y \in m^n$

- È ben definita:

- $y \notin m \to v(y) = 0$
- $y \in m \Rightarrow \sqrt{y} = \bigcap_{y \in \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = m$ perché A dom di dim = 1 locale

ovvero $\exists\, n : m^{n+1} \subset (y) \Rightarrow y \mid x^{n+1}, y \nmid x^n$

Voglio dire $x^k \mid y \Rightarrow k \leq n+1$

Se $x^k \mid y\ \forall k \Rightarrow x^{n+1} \mid y \mid x^{n+1} \Rightarrow x^{n+1} u = y$ $\quad vu = 1$
$y v = x^{n+1}$

$\to$ se $x^{n+2} \mid y$: $y = x^{n+2} k = x^{n+1} \cdot u \to xk = u \in A^*$
ma an, $x \notin A^*$

- $v(y) = n \to y = ux^n, u \in A^*$
$\downarrow$
$ux^n = y$: se $u \notin A^*$: $u \in m = (x) \to u = ax, y = ax^{n+1}$ an.

$\Rightarrow A \setminus \{0\} \to \mathbb{Z} \rightsquigarrow K^* \to \mathbb{Z}$ $\leftarrow$ ben def per.
$\quad y \mapsto v(y) \qquad y/x \mapsto v(y) - v(x)$

Vale: • $v(yz) = v(y) + v(z)$ $\qquad$ è una VALUTAZIONE DISCRETA
$v(y+z) \geq \min(v(y), v(z))$

Manca solo: $A = \{k \in K : v(k) \geq 0, k = 0\}$

Se $k = y/z \in K^* \Rightarrow v(y) = a, v(z) = b$. $y = x^a u$, $z = x^b v$ $\quad , u, v \in A^*$

$\Rightarrow k = \frac{u x^a}{v x^b} = \frac{u}{v} \cdot x^{a-b} \in A \iff a - b = v(x) > 0$

(2) $\Rightarrow$ (3) A normale e $\dim A = 1 \Rightarrow m$ principale

Sia $a \in m, a \neq 0$: $\sqrt{(a)} = m$ $\quad \exists\, n : m^n \not\subset (a), m^{n+1} \subset (a)$

Sia $b \in m^n - (a)$ e considero $\frac{b}{a} = c \notin A$: dimostriamo che $a/b = x \in A$

A normale $\Rightarrow$ - c non è intero su A
- $cm \not\subset m$ (m fin gen, sarebbe anche c intero su A)

m è un $A[c]$ modulo fedele $\quad \frac{b}{a} m \subset \frac{m^{n+1}}{a} \subset A \to cm = A \to m = \frac{1}{c} A = \frac{a}{b} \cdot A$

es 3.5: E campo, A E-alg fin generata : I ideale di A allora

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\substack{m \supset I \\ max}} m$$

Sol: basta per I primo.

Oss: $A = E[x_1, \dots, x_n]/_J$ e $I = \tilde{I}/_J$

e anche in questo caso basta $A = E[x_1, \dots, x_n]$

Ora $\underset{\underset{I}{\cup}}{A} = E[x_1, \dots, x_n] \subset \overline{E}[x_1, \dots, x_n] = \underset{\underset{q}{\cup}}{\overline{A}}$ estensione intera

tale che $q^c = I$ e $q = \bigcap_{\substack{n \text{ max} \\ \text{di } \overline{A} \\ q \subset n}} n$ $\therefore$ $I = q^c = \bigcap n^c \supseteq \bigcap_{\substack{m \text{ max} \\ m \supset I}} m$

d'altra parte $m \supset \sqrt{I} = I$ $\forall m \supset I \rightarrow I = \bigcap_{\substack{m \supset I \\ max}} m$

es 3.1: $K((x))$ non è una estensione algebrica di $K(x)$.

Sia $\lambda \in K((x))$: $\lambda = \sum_{\substack{n \geq N \\ \in \mathbb{Z}}} k_n x^n$, e scegliamo $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$

(vedi num di Liouville $\sum \left(\frac{1}{10}\right)^{n!}$) Per assurdo esistono $n, a_1, \dots, a_n$ t.c.

$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$ $a_i \in K(x)$

$\Rightarrow$ $b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n = 0$ con $b_i \in K[x]$.

Dimostriamo che non è possibile:

Ora λ^k avrà termini del tipo $\sqcup\, x^{n_1! + \dots + n_k!}$ $n_i \in [1, \dots, +\infty)$

$\Rightarrow$ in λ^n ho sicuramente $x^{n \cdot m!}$ $\forall m$, per m grande $(m+1)! \gg n \cdot m!$

Inoltre $n \cdot m! \gg (n-1)\, m! + (m-1)!$. sia $d = \max \deg b_i$

$\rightarrow$ $\lambda_M = \sum^{M} x^{m!}$ $\rightarrow$ $x^{m!} \mid \lambda^i - \lambda_M^i$ $\forall i$, sia $P(x) = b_0 x^n + \dots + b_n$

$\rightarrow$ $x^{m!} \mid P(\lambda) - P(\lambda_M) = -P(\lambda_M)$

• Lemma di normalizzazione di Noether

Teo [Lemma di Noether]

A una K-alg fin gen: $\exists\, x_1,\dots,x_m \in A$ alg. indip: $K[x_1,\dots,x_m] \subset A$ finita

Dim: $A = K[y_1,\dots,y_n]$ con y_i t.c. $f(y_1,\dots,y_n) = 0$

(·) Dimostriamo che $\exists\, a_2,\dots,a_n$: $x_i = y_i - a_i y_1$ $\forall i = 2,\dots,n$
e $K[x_2,\dots,x_n] \subset A$ finita

Se riesco, continuo fino a che x_i (*) linearm indip + torni ok

→ $f(y_1,\dots,y_n) = \sum_{i=1}^{\deg f} f_i(y_1,\dots,y_n)$ con f_i omogenei di grado i

Guardo $f_N(y_1,\dots,y_n)$: se trovo $a_1,\dots,a_{n-1}$: $\overbrace{f_N(a_1,\dots,a_{n-1},1)}^{\lambda} \neq 0$

$$\Rightarrow \tilde f(x_1,\dots,x_n,y_n) = \sum_{\sum k_i = N} c_{k_1}\cdots c_{k_n}(x_1+a_1y_n)^{k_1}\cdots(x_{n-1}+a_{n-1}y_n)^{k_{n-1}}\, y_n^{k_n} + \dots$$
$$= \Big(\sum c_{k_1\dots k_n}\, a_1^{k_1}\cdots a_{n-1}^{k_{n-1}}\Big) y_n^N + \dots$$
$$=: f_N(a_1,\dots,a_{n-1},1)\, y_n^N + \dots$$

← termini in y_n con deg $< N$ e coef in $K[x_1,\dots,x_{n-1}]$

$\Rightarrow \lambda \in K \subset A$: $\exists\, \lambda^{-1} \in K$

→ $\lambda^{-1}\tilde f(x_1,\dots,x_{n-1},y_n) = f(y_1,\dots,y_{n-1},y_n) = 0$

$\Rightarrow$ y_n soddisfa un polinomio monico a coef in $K[x_1,\dots,x_{n-1}]$
quindi è intero in $K[x_1,\dots,x_{n-1}]$.

Cor A K-alg fin gen $\Rightarrow$ $B = K[x_1,\dots,x_m] \subset A$ finita → $\dim B = \dim A$

Prop: $f \in K[x_1,\dots,x_n]$: $\dim \underbrace{K[x_1,\dots,x_n]_f}_{A} = n$

Dim: • $(0) \subset (x_1) \subset (x_1,x_2) \subset \dots \subset (x_1,\dots,x_n)$ ma quando localizzo potrebbero diventare tutto A.

K infinito: $\exists\, \alpha$ t.c. $f(\alpha) \neq 0$ $\alpha \in K^n$, allora considero
$(0) \subset (x_1-\alpha_1) \subset \dots \subset (x_1-\alpha_1,\dots,x_n-\alpha_n)$ e questo funziona

K finito: $K[x_1,\dots,x_n]_f \subset \underset{\text{infinito}}{\overline{K}}[x_1,\dots,x_n]_f$ intera

→ $\dim A \geq n$

• So che $\dim A \leq \dim K[x_1,\dots,x_n]$ (Spec(A) ↔ Spec(K[…]) ∩ {I ∌ f})

Dimostriamo per ind su n che $\dim \underbrace{K[x_1,\dots,x_n]}_{K_n} \leq n$

P.B: $n = 0$
P.I: $0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_m \subset K_n$: voglio $m \leq n$.

$\exists\, f \in p_1$ pol. primo e posso assumere $p_1 = (f)$: $A/(f)$:

$0 = \frac{p_1}{(f)} \subsetneq \frac{p_2}{(f)} \subsetneq \dots \subsetneq \frac{p_m}{(f)} \subsetneq \frac{K_n}{(f)} = B$ che è finito su $K[y_1,\dots,y_r]$ $r<n$

→ $m \leq r+1 < n+1$ ✓

A dominio $\to K = \mathrm{Quot}(A)$ e $\Bbbk \subset K$ e vogliamo grado di trasc.

Def: A $\Bbbk$-algebra (fin. generato) non serve in questo caso

$\{x_\alpha\} \in A$ si dice base di trascendenza se

- x_α alg. indipendenti
- $\{x_\alpha\}$ insieme massimale di sottoinsiemi alg indip di A

Se esiste una base di trascendenza finita $\Rightarrow \mathrm{trdg}_{\Bbbk}(A) = \min\{n : \text{esiste una base di trasc con } n \text{ elem}\}$
(grado di trascendenza)

Se A è un dominio, $K = \mathrm{Quot}(A)$ e $\{x_i\} \subset A$, allora

$\{x_i\}$ base di trasc. di A $\iff$ lo sono di K

Infatti: - $\{x_i\}$ alg indip su A $\iff$ alg indip su K
($\Rightarrow$) - Se $y \in K$ voglio dire che y è algebrico su $\Bbbk(x_i : i \in I)$:

$y = \frac{a}{b}$ con $a, b \in A$ che ha $\{x_i\}$ come base di trasc, quindi
a, b sono algebrici su $\Bbbk(x_i : i \in I)$ e quindi anche y

Teo: $\overset{K}{A}$ una $\Bbbk$-alg, $\overset{\text{campo}}{\text{dominio}}$ e con $\mathrm{trdg}_{\Bbbk} A := n < +\infty$. Allora tutte le basi di trascendenza di $\underset{K}{A}$ hanno dimensione n ~~ed in particolare n = dim A~~

Dim: Sia $\{y_1, \dots, y_n\}$ una base di trascendenza di A e sia $\{z_i\}$ un'altra base

- Facciamo il caso $A = K \supset \Bbbk$ campo: considero $\Bbbk(z_i : i \in I) = L \subset K$

$\to y_i$ algebrico su L $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \exists N$ t.c. y_i alg su $\Bbbk(z_1, \dots, z_N)$

Dimostro che $N \leq n \to$ tesi

vogliamo avere una situazione A, B intere e local. perché so come funz. la dim.

$S = \Bbbk[y_1, \dots, y_n] \subset K$
$T = \Bbbk[z_1, \dots, z_N] \subset K$
$\to$ esiste $f \in S$ tale che z_i intero su S_f
$g \in T$ tale che $y_1, \dots, y_n, f^{-1}$ interi su T_g

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Rightarrow & S & \subset & S_f & \overset{\text{intera}}{\subset} & S_f[z_1, \dots, z_N] & \subset & \Bbbk[y_i, z_i, f^{-1}, g^{-1}] = (S_f[z_i])_g \\
\text{dim:} & n & & n & & n & & N \leq n \\
 & & & & & \cup & & \cup \ (\text{intera}) \\
 & & & & & T & \subset & T_g \\
 & & & & & N & & N
\end{array}$$

Cor • A $\Bbbk$-alg finitamente generata e dominio: $\mathrm{trdg}\, A = \mathrm{trdg}\, K = \dim A$

$\to A \supset \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ algebra di polinomi e estensione $\boxed{\text{finita}}$
$K \supset \Bbbk(x_1, \dots, x_n)$ è alg $\to \{x_i\}$ base di trasc. di K fatta di elementi di A
$\to \mathrm{trdg}\, K = \underset{\dim A}{\overset{\shortparallel}{n}} = \mathrm{trdg}\, A$

ex: se A non è un dominio → non è vero che la dim della base di trasc è ben definita.

$\mathbb{k} = \mathbb{C} \to \mathbb{C}[y] \times \mathbb{C}[x,z] = \dfrac{\mathbb{C}[x,y,z,u]}{\substack{uz = ux = 0 \\ uy = y \\ u(u-1) = 0}} = A$ $\quad u = 0 \to y = 0 \;\; \mathbb{C}[x, z]$; $u = 1 \to x, z = 0 : \mathbb{C}[y]$

Con 1 el: y $\quad ((y, 0))$ $\quad xy = (xu)y = 0$
2 el: x, z $\quad ((0, x), (0, z))$ $\quad zy = (zu)y = 0$

ex2: $\mathbb{C} \times \mathbb{C}[x]$ e $p = 0 \times \mathbb{C}[x]$ e $q_i = \mathbb{C} \times p_i$

$\Rightarrow \dim A = 1, \quad \underbrace{\dim A_p}_{ht(p)} = \underbrace{\dim \frac{A}{p}}_{coht(p)} = 0$

Lemma A $\mathbb{k}$-alg fin. generata, A dominio e sia p primo con $ht(p) = 1$

$$\Rightarrow \dim \frac{A}{p} = \dim A - 1$$

Dim: 1) $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$: p primo di altezza 1 $\Rightarrow 0 \subsetneq p \ni f$ irrid.

Cioè $p = (f)$ per minimalità (se $(f) \subsetneq p \to ht(p) \geq 2$)

$\Rightarrow A/_{(f)} = \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{(f)}$ e $\dim A/_{(f)} < n$ $\left[\dfrac{A}{(f)} \supseteq \mathbb{k}[y_1, \dots, y_m] \text{ int}, \; m < n\right]$

Basta dimostrare che $\dim \dfrac{A}{(f)} \geq n-1$:

DOMINIO

se avessi $g(\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 0$

$\to g(x_2, \dots, x_n) \in f$

$g(x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) h(x_1, \dots, x_n)$

ma $[g]_{x_1}^{\infty} = 0$

$[fh]_{x_1}^{\infty} = [f]_{x_1}^{m} [h]_{x_1}^{m}$

Supponiamo che x_1 compaia in f: $\mathbb{k}[x_2, \dots, x_n] \subset \dfrac{A}{(f)}$

$\Rightarrow \{x_2, \dots, x_n\}$ alg. indip su $A/_f$.

2) A dominio : $A \overset{fin}{\supset} \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ e sia $p \subseteq A$: $ht(p) = 1$

$\Rightarrow p^c \subset \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ è minimale $\left(\text{g.d.} \quad \substack{0 \subseteq p' \subseteq p^c \\ \downarrow \\ 0 \subseteq q \subseteq p} \quad \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n] \subset A \text{ massimale intera}\right)$

$\dfrac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{p^c} \overset{fin}{\subset} \dfrac{A}{p}$ e $\dim \dfrac{A}{p} = \dim \dfrac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{p} = n - 1$.

Teo: A $\mathbb{k}$-alg fin. generata : p, q primi di A, $p \subset q$

1. $ht(p), coht(p) < +\infty$
2. ogni catena massimale di primi fra p e q $(p = p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_k = q)$ ha lungh $\dim A/p - \dim A/q$
3. A è dominio : $\dim A = ht(p) + coht(p)$

Dim: 1. $ht(p) = \dim A_p < \dim A$ e uguale per coht

2. $p = p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_n = q$ massimale :

- $p_1/_{p_0}$ primo di $A/_{p_0}$ con $ht(p_1/_{p_0}) = 1$: $\dim \dfrac{A}{p_1} = \dim \dfrac{A}{p_0} - 1$
- e così $\forall i$: $\dim A/_{p_i} = \dim A/_{p_0} - i$

$\Rightarrow \dim A/_q = \dim A/_p - n$

3. $\overset{m}{\overset{\shortparallel}{p}}$ massimale : $\dim A = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \frac{A}{m}} + \dim A_m = ht(m)$

Ma ora $ht(m)$ è la lunghezza di una catena max che inizia in 0 e finisce in m e il pt 2 mi dà l'$=$ ↑.

p qualsiasi : $p \subset m$ max : $ht(p) = \dim A_p =$ max lung. di catena fra 0 e p

$= \dim A - \dim \frac{A}{p} = \dim A - coht(p)$

$\Rightarrow$?
$$\begin{array}{ccc} A & \subset & K \\ \cap & & \cap \\ \bar{A}^L & \subset & L \\ \shortparallel & & \\ B & & \end{array}$$
finita

Vorrei capire se B è finito su A, in particolare nel caso $L = K$.
In generale è falso.

__Teo__: A dominio normale noetheriano, $K = Quot(A)$, $K \subset L$ finita e separabile e $B = \bar{A}^L \Rightarrow B$ finito su A

__Dim__: Mi basta considerare L di Galois:
se non è di Galois: $\begin{array}{ccccc} K & \subset & L & \subset & \tilde{L} \\ \cup & & \cap & & \cap \\ A & \subset & B & \subset & C \end{array}$ $\to$ C finito su A + A NOETH e B sottomodulo di C è anche lui fin. gen su A

$\Rightarrow Gal(L/K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$

Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ una k-base di L fatta di elementi di B
(se $k \in \dots \Rightarrow \exists a \in A$ t.c. $ak \in B$)

Dimostro che $B \subset \underbrace{\frac{1}{D}(Ax_1 + \dots + Ax_n)}_{A \text{ modulo fin gen su } A + \text{noeth}} \to B$ A-mod f.g su A

Sia $d = \det((\sigma_i(x_j))) \Rightarrow D = d^2$ invariante per Gal
$\to D \in K$

Ora $x_j \in B$, $\sigma(B) = B$ $\left(\sigma(b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_0) = \sigma(b)^n + a_1 \sigma(b)^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \right)$

10/21

$\Rightarrow$ In particolare $D = \det((\sigma_i(x_j)))^2 \in B \cap K = A$

Oss: $\underline{\underline{d \neq 0}}$: se $d = 0 \Rightarrow \exists \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : (\sigma_i(x_j)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\to (\Sigma \lambda_i \sigma_i)(x_j) = 0 \ \forall j \Rightarrow \Sigma \lambda_i \sigma_i \equiv 0$
+ ARTIN $\Longrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$

$\to M = (\sigma_i(x_j))$ invertibile $\to \boxed{M^{-1} = \frac{1}{d} N}$ con N a coef in B

Quindi sia $x \in B$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\lambda_i \in K$

Th $\equiv B \subset \frac{1}{D}(Ax_1 + \dots + Ax_n) \equiv \lambda_i \in \frac{A}{D} \ \forall i$

$\to x = \sum \lambda_i x_i$ e $\sigma_j(x) = \sum \lambda_i \sigma_j(x_i)$ allora:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(x) \\ \vdots \\ \sigma_n(x) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \underset{B \ni}{\frac{1}{d}} \underset{\text{coef in } B}{\underline{\underline{N}}} \overset{\in B}{\begin{pmatrix} \sigma_1(x) \\ | \\ \sigma_n(x) \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow D\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ | \\ \lambda_n \end{pmatrix} = dN \begin{pmatrix} \sigma_1(x) \\ | \\ \sigma_n(x) \end{pmatrix} \in B \Rightarrow D\lambda_i \in K \cap B = A \quad \checkmark$$

$K \ni$

$\lambda_i \in K$

$\in$

<u>Teo</u>: A dominio, $\mathbb{k}$-algebra fin. generata, $K = Quot(A)$ e $K \subset L$ estensione finita.

$\Rightarrow \overline{A}^L = B$ finita su A

$$\begin{array}{ccc} \overset{f.g.}{A} & \subset & K \\ \cap & & \cap \, fin \\ B & \subset & L \end{array}$$

<u>Cor</u>: A come nel teo $\Rightarrow$ la normalizzazione di A ($\overline{A}^K$) finita su A

Dim (<u>Teo</u>): Per il lemma di Noether $\exists\, \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n] \subset A$ finita

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n] & \subset & A & \subset & B \\ \cap & & \cap & & \cap \\ \mathbb{k}(x_1,\dots,x_n) = M & \underbrace{\subset}_{fin} & K & \underbrace{\quad}_{fin. (ip)} & L \end{array}$$

<u>Oss</u>: poiché A fin su $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n] \Rightarrow$ è intero

$\to \overline{A}^L = \overline{\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]}^L = B$

quindi se dimostro il teo per $\boxed{A = \mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]}$ ho fatto.

- $K \subset L$ finita, $\tilde{L} \supset L \supset K$ fin e normale $\Rightarrow$ suppongo $\underline{L \text{ normale}}$ (come 5), uso la noetherianità di A)

Sia $G = Aut_K(L) = \{\varphi: L \to L$ di campi t.c. $\varphi|_K = id\}$

$\Rightarrow K \subset L^G = E \subset L$ con $E \supset K$ finita: $x \in E\ \exists n: x^{p^n} \in K$

Abbiamo:
$$\begin{array}{ccccccc} K & \subset & E & \overset{Gal}{\subset} & L \\ \cup & & \cup & & \cup \\ A & \subset & \underset{normale}{\boxed{C}} & \overset{fin}{\subset} & B \end{array}$$
con $C = \overline{A}^E$

$\to K \subset E = \mathbb{k}(y_1,\dots,y_m)$ ed $\exists\, q = p^h: y_i^q \in K$

Voglio: $\mathbb{k}(x_1,\dots,x_n) \subset E \subset \mathbb{k}(x_1^{1/q},\dots,x_n^{1/q}) \to \underline{ok}$
(perché char $\mathbb{k} = p$, $q = p^h$)

$$\begin{array}{ccccc} \Rightarrow K = \mathbb{k}(x_1,\dots,x_n) & \subset & E & \subset & \mathbb{k}(x_1^{1/q},\dots,x_n^{1/q}) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ A & \subset & C & \subset & \overline{A}^{\mathbb{k}(x_1^{1/q},\dots,x_n^{1/q})} = D = \mathbb{k}[x_1^{1/q},\dots,x_n^{1/q}] \end{array}$$

e D finito su A e quindi anche C per noetherianità

$\Rightarrow B \supset\ \supset A$ finita per transi.

- Anelli locali noetheriani

TEO [ideale principale di Krull] A anello noetheriano, $a \in A$, $p \in \operatorname{Spec} A$, $p \supseteq a$ minimale su a

$$\longrightarrow ht(p) \leq 1$$

Oss (Lemma) Se $f: A \to B$ e I è un ideale q-primario di B

$\Rightarrow$ I^c è un ideale q^c-primario di A

Dim: - $xy \in I^c \Rightarrow f(x)f(y) \in I \Rightarrow f(x) \in I$ o $f(y^n) \in I$
$x \in I^c$ o $y^n \in I^c$

- $x \in \sqrt{I^c} \Rightarrow x^n \in I^c \to f(x^n) \in \sqrt{I} = q \to x \in q^c$

Dim (teo): p primo di A ; $p^{(n)} := \underbrace{(pA_p)^n}_{\text{è primario in } A_p} \cap A$ $\Big\}$ è p-primario

$p^n \subseteq p^{(n)}$, $\hat{A}_p$

Sia p minimale su a: supp. per assurdo $p_2 \subsetneq p_1 \subsetneq p$

Passando ai quozienti: A/p_2 : $(0) \subsetneq p_1/p_2 \subsetneq p/p_2$

$\to$ supponiamo A dominio, $p_2 = (0)$

Inoltre localizzando con $A - p$: p massimale e A locale

$\longrightarrow$ A dominio, locale : $(0) \subsetneq q \subsetneq p$ $\quad p$ max

p minimale sopra a $\Rightarrow$ è l'unico primo che contiene a è $p \longrightarrow \sqrt{(a)} = p$.

$\to \dfrac{A}{\sqrt{a}}$ è un CAMPO e $\dfrac{A}{(a)}$ è un anello artiniano

$\Rightarrow$ Consideriamo: $q \supset q^{(2)} \supset q^{(3)} \supset \cdots$ ideali in A

$\Rightarrow \quad \dfrac{q+(a)}{(a)} \supset \dfrac{q^{(2)}+(a)}{(a)} \supset \cdots \supset \dfrac{q^{(n)}+(a)}{(a)} = \cdots =$

$q^{(i)}$ è catena stazionaria in A

catena discendente in $\dfrac{A}{(a)}$ $\to$ stabilizza

ovvero $\exists\, n$: $q^{(n)} + (a) = q^{(n+1)} + (a)$

* Da qui dimostro che $q^{(n)} = q^{(n+1)} + a\, q^{(n)}$

$\subseteq$: $x \in q^{(n)} \to x = y + az$ con $y \in q^{(n+1)}$

Voglio $z \in q^{(n)}$ e $az = x - y \in q^{(n)}$ $\quad$ q-primario
e $a^k \notin q \;\forall k$ $\quad \longrightarrow z \in q^{(n)}$ ✓

$\Rightarrow \dfrac{q^{(n)}}{q^{(n+1)}} = a\, \dfrac{q^{(n)}}{q^{(n+1)}} \Longrightarrow \dfrac{q^{(n)}}{q^{(n+1)}} = p\, \dfrac{q^{(n)}}{q^{(n+1)}}$

$\xrightarrow[\text{Nak}]{} \quad q^{(n)} = q^{(n+1)}$

Quindi: A dominio locale con $\mathfrak{p}$ ideale max $\Rightarrow$ se $\exists\ 0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$
$\to \frac{\mathfrak{q}^{(n)}}{(a)}$ stnt

corrispondenza fra gli ideali primari di A e $A_\mathfrak{q}$

Ma allora $\boxed{\mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1} A_\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}(\mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q}) \xrightarrow[Nak]{} \mathfrak{q}^n A_\mathfrak{q} = 0 \longrightarrow \mathfrak{q}^n = 0$

Ma 0 è primo e $\mathfrak{q}^n$ no $\Rightarrow$ assurdo.

Prop: A noetheriano, $x_1, \dots, x_n \in A$ e $\mathfrak{p}$ minimale su $(x_1, \dots, x_n)$ 10/22
$\Rightarrow ht(\mathfrak{p}) \leq n$

Dim: Sia $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ e voglio $d \leq n$ (*)

A dominio locale { Quozientando per $\mathfrak{p}_0$ e localizzando in $A \setminus \mathfrak{p}$ possiamo assumere $\mathfrak{p}_0 = 0$ e $\mathfrak{p}$ unico id massimale di A.

$\mathfrak{p}$ minimale su $(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \sqrt{(x_1, \dots, x_n)} = \sqrt{(x_1^m, \dots, x_n^m)} = \mathfrak{p}$

(*) osserviamo che possiamo anche assumere che $\mathfrak{p}_{d-1}$ sia massimale fra gli ideali $\mathfrak{p}_{d-2} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_d$
$\{\mathfrak{p}_{d-2} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_d\}$ non vuoto per def + Noetherianità

$\to (x_1, \dots, x_n) \not\subseteq \mathfrak{p}_{d-1}$ wlog $x_n \notin \mathfrak{p}_{d-1}$ ma per (*) $\mathfrak{p}$ è l'unico ideale che contiene $(\mathfrak{p}_{d-1}, x_n)$, $\sqrt{(\mathfrak{p}_{d-1}, x_n)} = \mathfrak{p}$

$\Rightarrow x_i \in \mathfrak{p} \Rightarrow \exists\, m$ t.c. $x_i^m = a_i + x_n b_i$ con $a_i \in \mathfrak{p}_{d-1}$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

Ma allora $x_i^m \in (a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ $\forall i \to \sqrt{(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)} = \mathfrak{p}$

$\Rightarrow \frac{A}{(a_1, \dots, a_n)} = \bar{A} \supset \bar{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{p}}{(a_1, \dots, a_{n-1})}$ e $\bar{x}_n \in \bar{A}$

$\to \bar{\mathfrak{p}}$ minimale fra gli ideali che contengono $\bar{x}_n$
ed abbiamo $\overline{\mathfrak{p}_{d-1}} = \frac{\mathfrak{p}_d}{(a_1, \dots, a_{n-1})}$

Ci siamo ricondotti a: $\bar{A} \supset \bar{\mathfrak{p}} \supset \overline{\mathfrak{p}_{d-1}}$ e $\bar{\mathfrak{p}}$ minimale su $\bar{x}_n$

Claim: $\mathfrak{p}_{d-1}$ minimale su $(a_1, \dots, a_{n-1})$

$\to$ Se lo dimostro, per induzione su n: $ht(\mathfrak{p}_{d-1}) \leq n-1$
$\Rightarrow ht(\mathfrak{p}_d) \leq n$

In effetti il Claim è vero, infatti:

1. [Teo dell'ideale principale di Krull]: $ht_{\bar{A}}(\bar{\mathfrak{p}}) \leq 1$
2. $\overline{\mathfrak{p}_{d-1}} \subsetneq \bar{\mathfrak{p}} \Rightarrow ht_{\bar{A}}(\overline{\mathfrak{p}_{d-1}}) = 0$ cioè $\mathfrak{p}_{d-1}$ minimale su $(a_1, \dots, a_n)$

Teo: (A, m) anello locale noetheriano

1. $\dim A < +\infty$
2. $\dim A = \min\{n : \exists I \text{ ideale } m\text{-primario gen. da } n \text{ el}\}$
3. $a \in m$: $\dim A/(a) \geq \dim A - 1$
4. $a \in m \setminus Div_0(A) \Rightarrow \dim A/(a) = \dim A - 1$

Dim: 2.) • Se I è m-primario, $I = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \sqrt{I} = m$

$\leq$ quindi m è l'unico ideale primo che contiene I

$\Rightarrow m$ minimale su $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow[\text{Prop}]{} ht(m) \leq n$

Inoltre $ht(m) = \dim A_m = \dim A \leq n$

1.) • m è fin gen e m-primario: $\dim A \leq \dim_{A/m} \frac{m}{m^2} < +\infty$

$\Rightarrow$ Sappiamo $\dim A \leq \min\{n : \exists I \text{ } m\text{-prim generato da } n \text{ el}\}$

3.) $a \in p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_d = m$ con $d = \dim A$

$\rightarrow \dim A/(a) = \dim A$

Se $a \notin p_0$: voglio $\dim A/(a) \geq \dim A - 1$

(•) Costruisco $p_0 \subsetneq p_1' \subsetneq p_2' \subsetneq \dots \subsetneq p_{d-1}' \subsetneq p_d = m$ t.c.

$a \in p_1' \setminus p_0 \rightarrow \frac{p_1'}{(a)} \subsetneq \frac{p_2'}{(a)} \subsetneq \dots \subsetneq \frac{p_d}{(a)} = \frac{m}{(a)}$ è una catena lunga $d-1$ in $A/(a)$

$\rightarrow \dim A/(a) \geq \dim A - 1$

(•) Dimostro per induzione su d che posso costruire la successione

P.B. $d = 1$, ovvio

P.I. $d > 1$: se $a \in p_{d-1}$: $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_{d-1} \subsetneq p_d = m$ procedo per ind.

Se $a \notin p_{d-1}$: $\bar{a} \in \frac{A}{p_{d-2}}$ e sia $\bar{p}'$ min su $\bar{a}$ $\rightarrow ht(\bar{p}') \leq 1$

Ora $\frac{A}{p_{d-2}}$: $0 \subset \underbrace{\frac{p_{d-1}}{p_{d-2}} \subset \frac{m}{p_{d-2}}}_{ht=2}$

$\Rightarrow \bar{p}' \neq \bar{m}$: $\bar{p}' = p'/p_{d-2} \subset \frac{m}{p_{d-2}}$

Quindi considero $p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_{d-2} \subsetneq p' \subsetneq m$ e poiché $a \in p' \rightarrow$ trovo la catena per ip. ind.

4.) $a \in m \setminus Div_0(A)$: $\dim A/(a) = \dim A - 1$

$Div_0 A = \bigcup_{\substack{OEP \\ min}} P$ Per 3. basta escludere che $\dim A/(a) = \dim A = d$

$\Rightarrow \frac{p_0}{(a)} \subsetneq \frac{p_1}{(a)} \subsetneq \dots \subsetneq \frac{p_{d-1}}{(a)} = \frac{m}{(a)} \rightarrow p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \dots \subsetneq p_d$ con $a \in p_0 \xrightarrow{(o)} p_0$ non è minimale ass.

Manca solo da dimostrare (2. $\geq$) : induzione su $d = \dim A$

P.B. $d=0$: A artiniano locale $\Rightarrow$ 0 è m-primario

P.I. $d \geq 1$: $p_1, \dots, p_k$ ideali minimali di $A \Rightarrow m \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{k} p_i$ scansam.

$\Rightarrow \exists\, x \in m - (p_1 \cup \dots \cup p_k) = m - \mathrm{Div}_0(A)$

Per 3.) $B = \frac{A}{(x)}$ ha $\dim B = \dim A - 1$

$\xrightarrow{\text{ip.ind}}$ $\exists\, \bar{x_2}, \dots, \bar{x_d}$ t.c. $(\bar{x_2}, \dots, \bar{x_d})$ è $\bar{m} = \frac{m}{(x)}$-primario

$\Rightarrow (x, x_2, \dots, x_d)$ è m-primario

Infatti se p primo t.c. $p \supset (x, x_1, \dots, x_d) \Rightarrow \bar{p} = \bar{m}$ da cui $p = m$.

ex: [$d = \dim A$, p_0 minimale $\rightarrow$ non è detto che faccia parte di una catena lunga d]

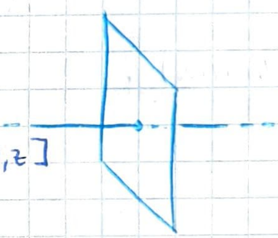
$A = \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{I}$ $p_1, \dots, p_k$ minimali : $\mathrm{Spec}\, A = \underbrace{V(p_1)}_{\text{chiuso e irrid.}} \cup \dots \cup \underline{V(p_k)}$

Se A dominio $\rightarrow$ $\mathrm{Spec}\, A$ irriducibile

$\Rightarrow \mathrm{Spec}\, A = V(I) \cup V(J) \rightarrow 0 \in V(I)$ wlog

$\Rightarrow \mathrm{Spec}\, A = \bar{0} \subset V(I)$ ✓

Consideriamo: $A = \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{xy = xz = 0} = \frac{\mathbb{C}[x,y,z]}{(x)(y,z)}$



Ora $p = (y,z)$, $q = (x)$ ideali primi di $\mathbb{C}[x,y,z]$

$\rightarrow$ sono minimali sopra $I = (xy, xz)$

Infatti $\mathrm{Max}\, A = \bar{V}(p) \cup \bar{V}(q) \Rightarrow V(p) \cup V(q) = $ tutto

se trovassi $r \in V(p) \cup V(q) \rightarrow \bar{V}(r) \subset \bar{V}(p) \cup \bar{V}(q) = \mathrm{Max}\, A$

$\Rightarrow r \supset p \cap q \rightarrow r \supset p$ o $r \supset q$

$\rightarrow p, q$ minimali in A : $- p \subseteq r \subseteq m \rightarrow 0 \subseteq \frac{r}{p} \subseteq \frac{m}{p} \subset \mathbb{C}[x]$

$\Rightarrow$ al max ho una catena lunga 1

$- q \subsetneq \_ \subsetneq m = (x,y,z) \rightarrow 0 \subseteq \_ \subseteq (y,z) \subset \mathbb{C}[y,z]$

$\Rightarrow$ al max ho una catena lunga 2

- Anello regolare

A noetheriano, $\dim A = d$ $\Rightarrow$ $(x_1, \dots, x_n)$ generano m : $n \geq d$
m locale

Def : se m è generato da $d = \dim A$ elementi $\Rightarrow$ A regolare

$\equiv$ A regolare se $\dim A = \dim_{A/m} \frac{m}{m^2}$

Lemma: A regolare $\Rightarrow$ A dominio

Criterio: A $\Bbbk$-algebra fin generata, $A = \dfrac{\Bbbk[x_1,\dots,x_n]}{(f_1,\dots,f_\cdot)}$ e sia m un punto razionale in $\Bbbk$
(m ideale massimale e $A/_m \simeq \Bbbk$ $\rightarrow$ $m = m_{(a_1,\dots,a_n)}$ $a_i \in \Bbbk$)

$\Rightarrow$ Quando A_m è razionale?

Sia $\dim A_m = d$ $\rightarrow$ $Jf = \left(\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)$ $\Big\}$ $\dim_{\Bbbk} \dfrac{m}{m^2} = n - \mathrm{rk}\, Jf(a)$

A_m regolare $\Leftrightarrow$ $\dim_{\Bbbk} \dfrac{m}{m^2} = d$

Suppongo $m = m_{(0,\dots,0)} = \dfrac{(x_1,\dots,x_n)}{(f_1,\dots,f_d)}$: $f_i = l_i + g_i$

$\Rightarrow$ $Jf(0) = (l_i,\dots,l_k)$: $\mathrm{rk}\, Jf(0) = r$

Ora $\dfrac{m}{m^2} = \dfrac{(x_1,\dots,x_n)}{(f_1,\dots,f_k)} \Big/ (x_1,\dots,x_n)^2 + (f_1,\dots,f_\cdot)/(f_1,\dots,f_\cdot)$

$= (x_1,\dots,x_n) \Big/ (x_1,\dots,x_n)^2 + (l_1,\dots,l_k)$

$\rightarrow$ $\dim_{\Bbbk} \dfrac{m}{m^2} = n - \mathrm{rk}(l_1,\dots,l_k)$

Dim (lemma): A loc. noetheriano regolare $\Rightarrow$ dominio

Induzione su $\dim A = d$:

P.B: $d = 0$: $m = 0 \rightarrow A$ campo $\rightarrow$ dominio

P.I: $(x_1,\dots,x_n) = m$ e $d = n$. Considero $A/_{(x_n)}$ locale noetheriano

e $\bar{m} = \dfrac{m}{(x_n)} = (\bar{x}_1,\dots,\overline{x_{n-1}})$ massimale

Allora: $\dim \bar{A} \underset{(3.\text{teo})}{\geq} n-1$ e $\dim \bar{A} \underset{(2.\text{teo})}{\leq} n-1 = \dim \dfrac{m}{m^2}$ $\rightarrow$ $\bar{A}$ regolare

$\rightarrow$ per induzione $\bar{A}$ è un dominio $\rightarrow$ (x_n) primo

1. esiste $x \in m$, $x \notin \bigcup p_i \cup m^2$ $\rightarrow$ completo a base di m
2. $A/_{(x)}$ dominio
3. (x) primo NON min
4. $q \subsetneq (x)$ $\rightarrow q = 0$

A dominio $\Leftrightarrow$ l'unico ideale minimale è 0.

Supponiamo $p_i \neq 0$ ideali minimali di A $\forall i$ e wlog $x_n \notin p_i$ $\forall i$

$m \supset p_1 \cup p_2 \dots \cup p_k \cup m^2$: $x_n \in m \setminus (\bigcup p_i \cup m^2)$
e la completo a una base di $m/_{m^2}$ $\longrightarrow$ base di m

$\Rightarrow$ $\underset{p}{(x_n)}$ primo con $ht = 1 \rightarrow \exists\, q$ primo t.c. $q \subset p$

Voglio $q = 0$: per Nak basta $mq = q$: $y \in q \subsetneq p$: $y = a x_n \rightarrow a \in q$
$\Rightarrow q \subset qm$ ✓

(A,m) e (B,n) locali noetheriani, $f: A \to B$ t.c. $m = n^c$.

Prop: Vale: 1. $\dim B \leq \dim A + \dim B/m^e$
2. f soddisfa il gd $\Rightarrow$ vale l'"="

Dim: 1. q ideale m-primario generato da $d = \dim A$ elementi:

q^e min su f(gen di q) $\to$ ht$(q^e) \leq d$

$q^e \subset m^e$ e $\dim \frac{B}{q^e} \geq \dim B - d$ $\quad \to \dim B/q^e \geq \dim B - $ ht(q^e)

Ora A noeth, $\sqrt{q} = m$: $\exists N: m^N \subset q$: $\forall x \in m^e = (m)_B$: $\exists n: x^n \in q^e$

$\Rightarrow m^e/q^e \subset Nil(B/q^e) = \bigcap_{\substack{P \text{ primi} \\ \text{di } B/q^e}} P$: Q primo $\Rightarrow Q \supset \bigcap P \supset \frac{m^e}{q^e}$

$\to \operatorname{Spec}(B/m^e) \simeq \operatorname{Spec}(B/q^e) \Rightarrow \dim B \leq \dim A + \dim B/m^e$

2. Sia $\delta = \dim B/m^e$: $\exists$ $m^e \subset P_d \subsetneq P_{d+1} \subsetneq \dots \subsetneq P_{d+\delta} \subset B$

Ora $P_d^c = m \Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \supsetneq & m & \supsetneq & q_{d-1} & \supsetneq & \cdots & \supsetneq & q_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ B & \supsetneq & P_d & \supsetneq & P_{d-1} & \supsetneq & \cdots & \supsetneq & P_0 \end{array}$$

e trovo i P_i via GD.

Che relazione c'è fra mappe che verificano il gd e φ aperta?

ex: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$: soddisfa banalmente il gd ma $\varphi: 0 \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$: $\varphi(\{0\}) = \{0\}$ che non è ap.

TEO: A, B noetheriano, $f: A \to B$ con $-B$ fin gen su A $\quad -f$ soddisfa il gd $\Rightarrow \varphi$ è aperta

Vediamo prima qualche lemma:

Lemma $A \subset K$ dominio, $\Bbbk$ alg chiuso, $f: A \to \Bbbk$ e $\mathcal{F} = \{(g,B) : g_{|A} = f, B \subset K\}$
$\Rightarrow$ Sia (g,B) max in $\mathcal{F}$ allora B è l'anello di valutazione di K

Dim: $\mathcal{F} \ni (f,A)$ e $(g,B) \leq (g',B')$ se $B \subset B'$ e $g'|_B = g$ $\xRightarrow[\text{ZORN}]{} \exists (g,B)$ max in $\mathcal{F}$

- B locale e $m = \ker g$ è il suo ideale massimale

$x \notin \ker g$: $g(x) \neq 0 \Rightarrow \tilde{g}(x): B_x \to \Bbbk$, $\frac{a}{x^k} \mapsto g(a)g(x)^{-k}$: $(\tilde{g}, B_x) \in \mathcal{F}$, $B \subseteq B_x \xrightarrow[\text{max}]{} x \in B^*$.

- $x \in K^*$: $m[x] \neq B[x]$ o $B[x^{-1}] \neq m[x^{-1}]$

Se per assurdo valessero i due $=$: $1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ $\quad a_i \in B$
$1 = \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \dots + \alpha_n x^{-n}$ $\quad \alpha_i \in B$

scritture minimali di 1 in $m[x]$, $m[x^{-1}]$ e wlog $m > n$

$$1 = a_0 + a_1 x + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_m\left((1-\alpha_0)^{-1}(\alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_n x^{m-n})\right)$$

è una scrittura di 1 più corta di m in $m[x]$, ass.

- B di valutazione su K : $x \in K$, wlog $m[x] \neq B[x]$: $\exists$ $m[x] \subset M$ max $\to m \subset M \cap B \subset m \Rightarrow M^c = m$

$\Rightarrow B \hookrightarrow B[x] \Rightarrow \begin{cases} B/m \hookrightarrow B[x]/M \\ m = \ker g \end{cases} \Rightarrow \tilde{g}: B/m \overset{k}{\hookrightarrow} \Bbbk$, $\Bbbk$ alg chiuso $\to \tilde{g}': \frac{B[x]}{M} \hookrightarrow \Bbbk$ e lo sollevo a $B[x]$

$x \in B$ per max (g,B)

Lemma "2" $A \subset B$ domini, B finito su A (come algebre), allora:

$$\exists a \in A \text{ t.c. } \forall f: A \to \mathbb{k},\ \mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}} \text{ se } f(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \tilde f: B \to \mathbb{k} \text{ t.c. } \tilde f|_A = f$$

Dim: dimostriamo che $\forall b \in B\ \exists a \in A$ t.c. $\forall f: A \to \mathbb{k}$, $f(a) \neq 0$, $\exists \tilde f: B \to \mathbb{k}$ che lo estende con $\tilde f(b) \neq 0$

Mi basta $B = A[\beta]$: infatti se $B = A[\beta_1, \dots, \beta_n]$ per induzione faccio

Fisso $b \in B$: $\exists c \in C = A[\beta_1, \dots, \beta_{n-1}]$: $f: C \to \mathbb{k}$ con $f(c) \neq 0$ si estende a $\tilde f$ con $\tilde f(b) \neq 0$

e (ip ind) trovo $a \in A$: $\forall f: A \to \mathbb{k}$ $f(a) \neq 0$ si estende a $g: C \to \mathbb{k}$ con $g(c) \neq 0$

$B = A[\beta]$ domini: ci sono due casi:

- β trascendente su A: $b \in B = A[\beta] \Rightarrow b = a_0 + a_1\beta + \dots + a_n\beta^n$ con $a_n \neq 0$

  $\to a = a_n$ e basta $\tilde f(\beta) = \gamma$ t.c. $\underbrace{f(a_n)}_{\neq 0}\gamma^n + \dots + f(a_0) \neq 0$ ← $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}} \to \mathbb{k}$ infinito

- β algebrico su A: $\exists \alpha_i, \alpha_n \neq 0$: $\beta^n \alpha_n + \dots + \alpha_1\beta + \alpha_0 = 0$

  Inoltre, $b \in A[\beta]$ è algebrico su A quindi anche b^{-1} lo è:

  $\exists a_i, a_m \neq 0$: $b^{-m}a_m + \dots + b^{-1}a_1 + a_0 = 0$

  (*) lo fa di nuovo

  $\to a = a_m\alpha_n$: $\gamma = \tilde f(\beta)$ t.c. $\gamma^n f(\alpha_n) + \dots + f(\alpha_0) = 0$, $\gamma \in \overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$

  $\Rightarrow \tilde f(b)$ è t.c. $f(b^m(b^{-m}a_m + \dots + b^{-1}a_1 + a_0)) = 0$

  $$0 \underset{(\circ)}{\neq} f(a_m) = -\underbrace{\tilde f(b)}_{\neq 0}\left(f(a_{m-1}) + \dots + \tilde f(b)^{m-1} f(a_0)\right)$$

Lemma "1" A, B domini, $A \subset B$ fin gen come algebre $\Rightarrow \varphi(X)$ contiene un aperto di Y

Dim: Sia a dato dal Lemma ↑: dimostro $Y_a \subset \varphi(X)$: $p \in Y_a \Leftrightarrow a \notin p$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd] & & & \mathbb{k} = \overline{\mathrm{Quot}(D)} \\
& \frac{A}{p} = D \arrow[r, hook, "i"'] & \mathrm{Quot}(D) \arrow[ur, "j"'] & \\
B \arrow[uurrr, bend right, "\tilde f"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$f = \pi \circ i \circ j$: $f(a) \neq 0$ $a \notin p$

$\Rightarrow \exists \tilde f: B \to \mathbb{k}$

$\Rightarrow q = \ker \tilde f$, $\ker f = p$: $q^c = p$

cioè $p \in \varphi(X)$.

Dim: Per verificare φ aperta, basta vedere che $\varphi(X)$ è aperto in Y: infatti

φ aperta $\Leftrightarrow \varphi(X_b)$ aperto $\forall b \in B$ ma $A \xrightarrow{f} B \underset{\substack{\text{piatta} \\ \to \text{gd}}}{\xrightarrow{S^{-1}}} B_b = \tilde f$ soddisfa il gb

$\Rightarrow \tilde f(\operatorname{Spec} B_b) = \varphi(X_b)$ quindi aperto.

• $f : A \to \mathbb{k}$, $B = A[\beta] \supset A$ finita come algebra : B algebrico ma $\to \exists\, a'$ t.c. $A[\beta]_{a'} \supseteq A_{a'}$ intera

$\Rightarrow b^n a' + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ $\boxed{a = a_0 \cdot a'}$

Sia $p = \ker \bar f \in \operatorname{Spec} A_{a'} \Rightarrow \exists\, P \in \operatorname{Spec} B_{a'}$ t.c. $P^c = p$, allora:

$A_{a'} \hookrightarrow B_{a'}$ intera

$\forall f : A \to \mathbb{k}$ t.c. $f(a) \neq 0$

$$\begin{tikzcd} A_{a'} \arrow[r, "\bar f"] & \mathbb{k} \\ A \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A_{a'} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{k} \\ \left(\frac{A_{a'}}{p}\right) \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed] & Q\left(\frac{A_{a'}}{p}\right) \arrow[u, "f_Q"'] \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} & \frac{A_{a'}}{p} \subset Q\left(\frac{A_{a'}}{p}\right) \arrow[r, "f_Q"] & \mathbb{k} \\ & \text{fin } \cap \quad \longmapsto \quad \cap \text{ finita} & \\ & \frac{B_{a'}}{P} \subset Q\left(\frac{B_{a'}}{P}\right) \arrow[uur, bend right, "g"'] & \\ B \arrow[ur] \arrow[uuurr, bend right, "\tilde f"'] & & \end{tikzcd}$$

Cioè : $f : A \to \mathbb{k}$ $f(a) \neq 0 \to f(a') \neq 0 \to \bar f : A_{a'} \to \mathbb{k}$ e $p = \ker \bar f$

$$\begin{tikzcd} \frac{A_{a'}}{p} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathbb{k} \\ Q\left(\frac{A_{a'}}{p}\right) \arrow[ur, "\bar f_Q"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre $P^c = p$ $P \in \operatorname{Spec} B_{a'}$

Allora

$$\begin{tikzcd} Q(A_{a'}/p) \arrow[r, "\bar f_Q"] & \mathbb{k} \\ \cap \text{ fin} & \\ Q\left(\frac{B_a}{P}\right) \arrow[uur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Trovo g che lo estende (omo di comp) e allora definisco

$$\tilde f(x) = g\left(\left[\tfrac{x}{1}\right]_P\right)$$

$\Rightarrow$ Quindi: $\tilde f(b) = g\left(\left[\frac{b}{1}\right]_P\right)$ ma $b^n a' + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 = 0$

quindi siccome $\tilde f(b^n a' + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0) = 0$ $\tilde f(b)$ radice di un poly con termine noto $\tilde f(a_0) = \bar f(a_0) \neq 0$

$\tilde f(b) \neq 0$

* COMPLETAMENTI

M un A-modulo e $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset \dots$ sottomoduli di M

Su M posso introdurre una topologia in cui un sistema fondamentale di intorni di m è dato da

$$\{ m + M_n \}_{n \in \mathbb{N}}$$

$(m + M_n) \cap (m + M_\ell) = m + M_{\max(\ell, n)} \longrightarrow$ intorni

Se $\{m_n\}$ è una successione in M, dico che è di Cauchy se

$\forall n \ \exists N$ t.c. $\forall a, b > N \ : \ m_a - m_b \in M_n$

$\Rightarrow \mathcal{M} = \{$successioni di Cauchy$\}$

(1) M si dice COMPLETO se ogni successione di Cauchy converge ed è T2

Diciamo che $\{m_n\}, \{p_n\} \in \mathcal{M} \ : \ \{m_n\} \sim \{p_n\}$ se $m_n - p_n \in M_k$ def $\forall k$

- Allora: - $\mathcal{M}$ è un A-modulo: (perché gli M_i sono sottomoduli)

  - $\overline{M} = \mathcal{M}/_{\sim}$ è ancora un A-modulo ($\pi : \mathcal{M} \to \overline{M}$ di A-moduli)

  [COMPLETAMENTO di M]

ex: • $M_n = M \ \forall n$: tutte le successioni sono di Cauchy e sono tutte equivalenti.

$\Rightarrow \boxed{\overline{M} = 0}$

• $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$ e $X = \bigcap_n M_n$: $N = \frac{M}{X}$ e $\frac{M_0}{X} = N_0 \supset \frac{M_1}{X} = N_1 \supset \dots$

$\Rightarrow$ Oss: $\overline{M} \simeq \overline{N}$

In fatti: $\mathcal{M} = \{$succ di Cauchy per $M\}$; $\mathcal{N} = \{$succ di Cauchy per $N\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ (m_n) & & ([m_n]) \end{array}$$

per def di X la mappa è surg e ben def.

Inoltre $(m_n) \sim (p_n) \iff ([m_n]) \sim ([p_n])$

$\iff m_n - p_n \in \frac{M_n}{X}$ def $\iff [m_n - p_n] \in M_n/_X = N_n$

$\Rightarrow \overline{M} \simeq \overline{N}$

Prop: $\overline{M}$ è completo e T2 e $\forall f : M \to Y$ con f di A-moduli continua, Y A-modulo $\begin{cases} \text{completo} \\ \text{T2} \end{cases}$ e t.c. $\mu_a : Y \to Y$ continua $(\circ)$ e $+ : Y \times Y \to Y$

$\Rightarrow \exists! \ \hat{f} : \overline{M} \to Y$ t.c.

$$\begin{tikzcd} m \quad M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ (m_n = m) \quad \overline{M} \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Def: devo definire $\hat{f}((p_n))$: $(f(p_n))$ di Cauchy in Y $(*)$

per vedere che passa al quoziente

$\Rightarrow \exists \lim_n f(p_n) \in Y$: $\hat{f}((p_n)) = \lim_n f(p_n)$

(*) Infatti sia U intorno di 0 in Y t.c. $f(M_n) \subset U$ allora

$\exists\, h$ t.c. $\forall a,b > h$ $\quad p_a - p_b \in M_n \Rightarrow f(p_a) - f(p_b) = f(p_a - p_b) \in f(M_n) \subset U$

$\rightarrow (f(p_n))_n$ di Cauchy

Vediamo che $\overline{f}$ è di A-moduli: $\overline{f}(a(p_n)) = \lim_n f(a(p_n)) \underset{f \text{ di A-mod}}{\overset{(\cdot)}{=}} \lim_n a f(p_n) = a\overline{f}(p_n)$

e anche per le somme

- Guardiamo ancora $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n \supset \dots$ e definiamo

$$\hat{M} = \varprojlim M/M_n = \{ (x_n) \in \prod M/M_n \text{ t.c. } \pi_n(x_n) = x_{n-1} \}$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[dr, "\alpha_{n+1}"] & \\ M/M_n \arrow[rr, "\pi_n"] & & M/M_{n-1} \end{tikzcd}$$

Ora abbiamo $\hat{p} : M \to \hat{M}$, $m \mapsto (x_n)$ dove $x_n = [m] \in M/M_n$ $\quad ; \ker \hat{p} = \bigcap M_n$

1. $\hat{M}$ è A-modulo
2. $\hat{\alpha}_n : \hat{M} \to M/M_n$, $(x_k) \mapsto x_n$
3. $\forall$ A-mod X e $\forall\, \varphi_n : X \to M/M_n$ t.c.
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi_n"'] \arrow[dr, "\varphi_{n-1}"] & \\ M/M_n \arrow[rr, "\pi_n"] & \circlearrowleft & M/M_{n+1} \end{tikzcd}$$
$\exists!\, \varphi : X \to \hat{M}$: $\varphi_n = \hat{\alpha}_n \varphi$

Infatti, se φ esiste $\varphi(x) = (\varphi_n(x))_n$ ed in effetti questo funziona

Prop:
$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\overline{p}"'] \arrow[d, "\hat{p}"] \\ \overline{M} \arrow[r, "\gamma"] & \hat{M} \end{tikzcd}$$
con $\overline{p}(m) = (x_n = m)_n$, $\hat{p}(m) = ([m]_{M_n})_n$

$\Rightarrow \exists!\, \gamma : \overline{M} \to \hat{M}$ che fa commutare il diagramma

Dim: $\overline{M} \overset{\overline{\alpha}_n}{\twoheadrightarrow} M/M_n$ t.c. $\overline{\alpha}_n(p_k) \overset{(\circ)}{=} [p_N]$ $\qquad (\circ)$ $p_k \in \overline{M}$: $\exists\, N$ t.c. $p_h - p_k \in M_n\ \forall h,k > N$

$\Rightarrow \forall h > N$: $[p_h]_{M_n} = [p_N]_{M_n}$

Osservo che:

- $\ker \overline{\alpha}_n = \{$succ che appartengono a M_n def.$\} = \overline{M}_n$ $\quad \left(\Rightarrow \frac{\overline{M}}{\overline{M}_n} \simeq \frac{M}{M_n}\right)$
- $\pi_n(\overline{\alpha}_n(p_k)) = [p_{N_n}]_{M_{n-1}}$ e so che $p_n - p_k \in M_n \subset M_{n-1} \Rightarrow N_n \geq N_{n-1}$
$= [p_{N_{n-1}}]_{M_{n-1}} = \overline{\alpha}_{n-1}(p_k)$

$\Rightarrow \exists!\, \gamma : \overline{M} \to \hat{M}$ t.c. $\gamma(p_k) = (\overline{\alpha}_n(p_k))$ e $\overline{\alpha}_n = \hat{\alpha}_n \gamma$

- $\ker \gamma = \{(p_k)$ t.c. $\overline{\alpha}_n(p_k) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \{(p_k) : p_k \in M_n$ def$\} = \{p : p \to 0\} = 0$
- γ surg: sia $(\hat{x}_n) \in \prod \frac{M}{M_n}$ e $x_n \in M$ t.c. $[x_n]_{M_n} = \hat{x}_n$, allora:

$p = (x_n)$ è di Cauchy:

$x_{n+1} - x_n$ è t.c. $\alpha_n(x_{n+1} - x_n) = \pi_{n+1}\alpha_{n+1}(x_{n+1}) - \alpha_n(x_n)$
$= \pi_{n+1}(\hat{x}_{n+1}) - \hat{x}_n = 0$ $\qquad (\hat{x}_n) \in \hat{M}$

e $\gamma(p) = (\overline{\alpha}_n(p)) = [x_n]_{M_n} = \alpha_n(x_n) = \hat{x}_n$

$\Rightarrow \gamma : \overline{M} \to \hat{M}$ isomorfismo

• Limiti induttivi e proiettivi

Introduzione sulle categorie: $\mathcal{C}$ categoria con $Ob(\mathcal{C})$, $Mor(\mathcal{C})$

Set $\quad Ob(Set) = \{\text{insiemi}\}$, $Mor(X,Y) = \{f: X \to Y\}$ con la composizione ...

Corr $\quad Ob(Corr) = \{\text{insiemi}\}$, $Mor(X,Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ e composizione:

- $A \subset X \times Y,\ B \subset Y \times Z \Rightarrow B \circ A = \{(x,t) \in X \times Z : \exists y \in Y: (x,y) \in A, (y,t) \in B\}$
- $id_X = \Delta_X \in X \times X$

A-mod $\quad Ob(A\text{mod}) = \{A\text{-moduli}\}$, $Mor(X,Y) = \{f: X \to Y \text{ di } A\text{-moduli}\}$

Funtori: ex: $\Gamma: Set \to Corr$ t.c. $\Gamma(X) = X$
$\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$

$F: I \to \mathcal{C}$ funtore (I diagramma, $Ob(I)$, $Mor(I)$ insiemi) 10/31

Limite PROIETTIVO $\varprojlim F(i)$:

$X \in \mathcal{C}$ con $\varphi_i : X \to F(i)$ t.c. $\forall\ i \xrightarrow{\alpha} j$ in I vale
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F\alpha"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$
e t.c. $\forall\ Y \in \mathcal{C}$ con $\psi_i : Y \to F(i)$ t.c. $\forall\ i \xrightarrow{\alpha} j \in I$ vale $\psi_j = F\alpha \circ \psi_i$

$\exists!\ \psi: Y \to X$ t.c. $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$ allora diciamo $X = \varprojlim F(i)$

Limite INDUTTIVO $\varinjlim F(i)$ (duale a sopra)

ex: $I: \ \circlearrowleft\!\cdot \quad \cdot\!\circlearrowleft \Rightarrow F: I \to \mathcal{C}$ equivale a scegliere $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$

Allora:

$\varprojlim F(i)$ è
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$
t.c. $\forall$
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$
$\exists!\ \psi : \psi_1 = \varphi_1 \circ \psi$

$\Rightarrow \varprojlim F(i)$ si indica con $X_1 \times X_2 = \prod_{i \in I} X_i$ e si chiama prodotto

$\varinjlim F(i)$ è il coprodotto e si indica $\coprod_{i \in I} X_i$

ex: $I: \ \cdot \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \cdot$
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "(\varphi_2)"] & \\ X_1 \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & & X_2 \end{tikzcd}$$
tale che $\varphi_2 = f\varphi_1$, $\varphi_2 = g\varphi_1$
$\Rightarrow f\varphi_1 = g\varphi_1$

e t.c. $\forall\ Y$ con $\psi: Y \to X_1$ $\exists!\ \Phi: Y \to X$ che scompone $\psi = \varphi \circ \Phi$

Ma ora $f\psi = g\psi \Rightarrow Im\ \psi \subset \{x : f(x) = g(x)\} = \varprojlim F$

e si chiama equalizzatore

E l'analogo del $\varinjlim$ è il coequalizzatore.

ex: I: $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$ $\Rightarrow$ F è $\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "g"'] & X_0 \end{tikzcd}$

Devo guardare diagrammi del tipo $\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "g"'] & X_0 \end{tikzcd}$ con $g\tilde{f} = f\tilde{g}$

e cerco (X, φ, ψ) t.c. $\forall$ diagr. come sopra $\exists!\ \phi : Y \to X$ per cui

$$\tilde{g} = \varphi\phi \qquad \tilde{f} = \psi\phi \qquad \text{dove } f\varphi = g\psi$$

$\Rightarrow X = \varprojlim F(i)$ = prodotto fibrato X_1, X_2 = PULL BACK

... allora $\varinjlim F(i)$ = PUSH OUT

In Set: EQUALIZZATORE $\begin{tikzcd} E \arrow[r] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ G \arrow[u, dashed, "\bar{\psi}"] \arrow[ur, "\psi"'] \end{tikzcd}$ $E = \{x : f(x) = g(x)\} \hookrightarrow X$

$\forall g \in G : \psi(g) \in E$:

PULLBACK: $\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend right, "\beta"'] \\ & P \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$

$P = \{(x,y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$

$\rightarrow f\pi_X(x,y) = f(x) = g(y) = g\pi_Y(x,y)$

$\forall w \in W \quad f(\alpha(w)) = g(\beta(w)) \quad (\alpha(w), \beta(w)) \in P$

$\Rightarrow \varphi(w) = (\alpha(w), \beta(w))$

$F : I \to \text{Set} \Rightarrow \varprojlim F(i) = \{(x_i) \in \prod F(i) : \forall \alpha : i \to j \ \ F(\alpha)(x_j) = x_i\}$

COEQUALIZZATORE $\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "\psi"'] & Z = Y/\sim \arrow[d, dashed, "\bar{\psi}"] \\ & & G \end{tikzcd}$ $y_1 \sim y_2$ se $\exists x : y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$

$\forall g \in G : [g] = [w] : \exists x : g = f(x),\ w = g(x)$

$\rightarrow \psi(w) = \psi g(x) = \psi f(x) = \psi(g)$ ✓

PUSH OUT $\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "i_X"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "i_Y"'] \arrow[drr, bend right, "\beta"'] & P \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \\ & & W \end{tikzcd}$

in Set è $\sqcup$

$P = X \sqcup Y/\sim$ dove $x \sim x$, $y \sim y$ e $x \sim y$ se $\exists z : f(z) = x$, $g(z) = y$

$\forall \bar{p} \in P$: $p \in X$: $\varphi(p) = \alpha(p)$; $p \in Y$: $\varphi(p) = \beta(p)$

$\Rightarrow \bar{p} = \bar{q}$ con $p \in X$, $q \in Y$: $\exists z : p = f(z)$, $q = g(z)$

$\Rightarrow \varphi(p) = \alpha(p) = \alpha f(z) = \beta g(z) = \varphi(q)$

$F : I \to \text{Set} \Rightarrow \varinjlim F(i) = \dfrac{\coprod F(i)}{\sim}$ dove $\sim$: $\langle F(i) \ni x_i \sim F(\alpha)(x_i) \in F(j) \rangle$

In A-mod $X \sqcup Y = X \oplus Y$

In generale per gli A-mod: $\varinjlim F(i) = \dfrac{\bigoplus F(i)}{\langle x_i - F(\alpha)x_i \rangle_{A\text{-id}}}$

$\varprojlim F(i)$ come in Set

LIMITI FILTRATI $F: I \to \mathcal{C}$

<u>Def</u>: dico che I è FILTRATO (o che lo è $\varinjlim F(i)$) se valgono

i) $\forall\, i, j \in I \ \exists\, h \in I, \alpha, \beta : \ \alpha : i \to h, \ \beta : j \to h$

ii) $\forall\, i, j, h \in I$, $h \xrightarrow{\alpha} i$, $h \xrightarrow{\beta} i$ esistono $k \in I$

$\gamma : i \to k$
$\delta : j \to k$ tali che

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dr, "\gamma"] & \\ h \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & k \\ & j \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

$\delta\beta = \gamma\alpha$

In questo caso $\langle x_i \sim F(\alpha)\, x_i \rangle$ coincide con

$x_i \sim x_j \iff \exists\, \alpha : i \to h, \ \beta : j \to h$ t.c. $F(\alpha)(x_i) = F(\beta)(x_j)$

In fatti:
- $x_i \sim x_i$
- $x_j \sim x_i \Rightarrow x_i \sim x_j$
- $x_i \sim x_j$ e $x_j \sim x_k$ allora

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha"] & s \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ j \arrow[ur, "\beta"] \arrow[r, "\gamma"'] & t \arrow[r, "\eta"'] & r \\ k \arrow[ur, "\delta"'] & & \end{tikzcd}$$

esistono $s \xrightarrow{\varepsilon} r$, $t \xrightarrow{\eta} r$ t.c. $\varepsilon\beta = \eta\gamma$

$\Rightarrow F(\eta\delta)(x_k) = F(\eta\beta)(x_j) = F(\varepsilon\beta)(x_j) = F(\varepsilon\alpha)(x_i)$

$\Rightarrow \varinjlim F(i) = \coprod F(i) /\sim$

<u>Oss</u>: se ho un limite filtrato di A moduli, il $\varinjlim$ insiemistico ha a sua volta una struttura di A-mod:

$[x_i] + [x_j] = [F(\alpha)(x_i) + F(\beta)(x_j)]$ se $i \xrightarrow{\alpha} h$, $j \xrightarrow{\beta} h$
$a[x_i] = [a x_i]$

$\Rightarrow$ anche negli A-mod $\varinjlim F(i) = \bigoplus F(i) /\sim$

<u>Oss</u>: $\mathcal{C}$ qualsiasi: $\operatorname{Hom}(X, \varprojlim F(i)) = \varprojlim \operatorname{Hom}(X, F(i))$ 11/04

$\operatorname{Hom}(\varinjlim F(i), C) = \varprojlim \operatorname{Hom}(F(i), C)$

$$\operatorname{Hom}(\varinjlim F(i), C) \equiv \left\{ \begin{tikzcd} F(i) \arrow[rr, "F\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\varphi_j"] \\ & C & \end{tikzcd} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} \operatorname{Hom}(F(x_j), C) \xrightarrow{F\alpha} \operatorname{Hom}(F(x_i), C) \\ \varphi_j \qquad\qquad\qquad F_\alpha \varphi_j \end{matrix} \right\}$$

e $\varprojlim \operatorname{Hom}(F(i), C) = \{ (\varphi_i) \in \prod \operatorname{Hom}(F(x_i), C)$ t.c. $\varphi_j \circ F(\alpha) = \varphi_i \}$

Valgono le seguenti proprietà

① $\varprojlim$ equalizzatori è l'equalizzatore dei limiti, cioè

$E_i \xrightarrow{\varepsilon_i} A_i \overset{\gamma_i}{\underset{\delta_i}{\rightrightarrows}} B_i$ equalizzatore $\forall i$, allora detti

$E = \varprojlim E_i$, $A = \varprojlim A_i$, $B = \varprojlim B_i$ e $A \xrightarrow{\gamma} B$ t.c.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & B \arrow[d, "\beta_i"] \\ A_i \arrow[r, "\gamma_i"'] & B \end{tikzcd}$$

e analogo $A \xrightarrow{\delta} B$

$E \xrightarrow{\varepsilon} A$

$\Rightarrow E \xrightarrow{\varepsilon} A \overset{\gamma}{\underset{\delta}{\rightrightarrows}} B$ è equalizzatore

<u>Oss</u>:
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "e_i"'] & A \arrow[r, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift right, "\delta"'] \arrow[d] & B \arrow[d, "\beta_i"] \\ E_i \arrow[r, "\varepsilon_i"'] & A_i \arrow[r, shift left, "\gamma_i"] \arrow[r, shift right] & B_i \end{tikzcd}$$

$\beta_i \circ \gamma \circ \varepsilon = (\gamma_i \circ \alpha_i) \circ \varepsilon_i = \gamma_i \circ (\varepsilon_i \circ e_i)$
$\beta_i \circ \delta \circ \varepsilon = (\delta_i \circ \alpha_i) \circ \varepsilon = \delta_i \circ (\varepsilon_i \circ e_i)$)) ε_i eq di $A_i \rightrightarrows B_i$ $\forall$

$\rightarrow \gamma \circ \varepsilon = \delta \circ \varepsilon$

Verifico che è proprio il limite

② Dualmente, $\varprojlim$ coequalizzatore è il coequalizzatore dei limiti

<u>Prop</u>: I filtrato, $F, G, H : I \to A\text{mod}$, $F \overset{\alpha}{\Rightarrow} G$, $G \overset{\beta}{\Rightarrow} H$ <u>trasf. naturali</u>

tali che: $0 \to F(i) \xrightarrow{\alpha_i} G(i) \xrightarrow{\beta_i} H(i) \to 0$ esatta $\forall i$

$\Rightarrow 0 \to \varinjlim F(i) \xrightarrow{\alpha} \varinjlim G(i) \xrightarrow{\beta} \varinjlim H(i) \to 0$ esatta

<u>Dim</u>: In questo caso $\varinjlim F(i) = \bigoplus F(i)/_\sim = F_\infty$, $\varinjlim G(i) = G_\infty$, $\varinjlim H(i) = H_\infty$

Sia $x_i \in F_i : [x_i] \in F_\infty$ e pongo $\alpha([x_i]) = [\alpha_i(x_i)]$ allora:

$$\begin{tikzcd} F_\infty \arrow[r, "\alpha"] & G_\infty \\ F_i \arrow[u] \arrow[r, "\alpha_i"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & G_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

e $x_i \sim x_j$: $\exists \varphi, \psi$: $F(\varphi)(x_i) = F(\psi)(x_j)$, quindi

$\alpha_h(F(\varphi)(x_i)) = \alpha_h(F(\psi)(x_j))$
$\quad \| \qquad\qquad \|$
$G\varphi(\alpha_i(x_i)) = G\psi(\alpha_j(x_j))$

cioè $\alpha_i(x_i) \sim \alpha_j(x_j)$ (ben def.)

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "F\varphi"'] & G(i) \arrow[d, "G\varphi"] \\ F(h) \arrow[r, "\alpha_h"'] & G(h) \end{tikzcd}$$

è anche unica come solo $F_\infty \to$ ⇒ mappa

* α iniettiva: $\alpha([x_i]) = 0 \Rightarrow \alpha_i(x_i) \sim 0$: $\exists \varphi : i \to h$ t.c. $G\varphi(\alpha_i(x_i)) = 0$
cioè $\alpha_h(F\varphi(x_i)) = 0 \to x_i \sim 0$
α_i inj

* $\beta \circ \alpha = 0$ $\quad (\beta \circ \alpha)([x_i]) = \beta([\alpha_i(x_i)]) = [\beta_i \alpha_i(x_i)] = 0$

$[y_i] \in \ker \beta$: $\exists \varphi : i \to h$ t.c. $H\varphi(\beta_i(y_i)) = 0$ cioè $\beta_h(H\varphi(y_i)) = 0$

$\ker \beta_h = \operatorname{Im} \alpha_h \to \exists x_h \in F(h) : H\varphi(y_i) = \alpha_h(x_h) \to [y_i] = [\alpha_h(x_h)] = \alpha([x_h])$

* I colimiti mandano coker in coker quindi β surj.

Prop: $F, G, H : \mathbb{Z}_{\leq 0} \to A$ e suppongo $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ trasf. naturali tali che

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(n) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "F_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G(n) \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "G_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H(n) \arrow[r] \arrow[d, "H_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (n+1) \arrow[r, "\alpha_{n+1}"'] & G(n+1) \arrow[r, "\beta_{n+1}"'] & H(n+1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

esatta $\forall n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$

con F_n surgettiva $\forall n$

$\Rightarrow 0 \to \varprojlim F_n \to \varprojlim G_n \to \varprojlim H_n \to 0$ è esatta

<u>Dim</u>: Definiamo: $\underset{\in \varprojlim F_n}{\alpha((x_n))} = (\alpha_n(x_n))_n \in \varprojlim G_n$ (verifica) e β

Sappiamo che i limiti proiettivi conservano i ker, quindi α iniettiva (e anche l'esattezza in G conservata)

Basta verificare la surgettività di β:

$(z_n) \in \varprojlim H_n$: $z_n \in H(n)$ e $H_n(z_n) = z_{n+1}$,

costruisco per induzione su $n \leq 0$, y_n t.c. $(y_n) \in \varprojlim G(n)$ e $\beta_n(y_n) = z_n$

P.B : β_0 surg: scelgo $y_0 \in G(0)$ t.c. $\beta_0(y_0) = z_0$

P.I: suppongo di aver già costruito $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-n}$ t.c. $G_i(y_i) = y_{i+1}$ $\forall i \geq n$
$\rightarrow$ costruisco y_{n-1}

$z_{n-1} \in H(n-1)$: $\exists\, w_{n-1} \in G(n-1)$ t.c. $\beta_{n-1}(w_{n-1}) = z_{n-1}$

$\forall x_{n-1} \in F(n-1)$ vale che:

$$\begin{tikzcd}
F(n-1) \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "F_{n-1}"'] & G(n-1) \arrow[r, "\beta_{n-1}"] \arrow[d, "G_{n-1}"] & H(n-1) \arrow[d, "H_{n-1}"] \\
F(n) \arrow[r, "\alpha_n"'] & G(n) \arrow[r, "\beta_n"'] & H(n)
\end{tikzcd}$$

$w = w_{n-1} + \alpha_{n-1}(x_{n-1})$ è t.c.
$\beta_{n-1}(w) = z_{n-1}$

Voglio modificare w_{n-1} con el di $\alpha_{n-1}(\cdot)$ in modo che $G_{n-1}(w) = y_n$

Osservo che: $\beta_n G_{n-1}(w) = \beta_n G_{n-1} w_{n-1} + \beta_n G_{n-1} \alpha_{n-1}(x_{n-1})$

$= \beta_n G_{n-1} w_{n-1} + \beta_n \alpha_n F_{n-1}(x_{n-1}) = H_{n-1}(\beta_{n-1}(w_{n-1}))$

Inoltre $\beta_n(G_{n-1}(w) - y_n) = H_{n-1}(z_{n-1}) - z_n = 0$ perché la succ è coerente

$\rightarrow G_{n-1}(w) - y_n = \alpha_n(\tilde{x}_n)$ e F_{n-1} surg: $\exists\, \tilde{x}_{n-1}$ t.c. $F_n(\tilde{x}_{n-1}) = \tilde{x}_n$

$\rightarrow y_{n-1} = w_{n-1} - \alpha_{n-1}(\tilde{x}_{n-1})$ soddisfa, infatti

$$\begin{cases} G_{n-1}(y_{n-1}) = G_{n-1}(w_{n-1}) - \quad \tilde{x}_n) = y_n \\ \beta_{n-1}(y_{n-1}) = z_{n-1} \end{cases}$$

Ancora sui completamenti

$M, \ M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_h \supset \cdots, \quad \hat{M} = \varprojlim M/M_n$

<u>Caso particolare</u> $A, \ A \supset I \supset I^2 \supset \cdots : \quad \hat{A} = \varprojlim A/I^n$

Se scelgo M, M_i t.c. $I M_n \subset M_{n+1} \Rightarrow \hat{M} = \varprojlim \frac{M}{M_n}$ $\hat{A}$-mod

Cioè:

1. $\hat{A}$ con $(x_n)\cdot(y_n) = (x_n \cdot y_n)$ $\left[\begin{matrix} \pi_n(x_n) = x_{n-1} \\ \pi_n(y_n) = y_{n-1} \end{matrix} \rightarrow \pi_n(x_n y_n) = y_{n-1} x_{n-1} \right]$

   è un ANELLO

2. $\hat{M}$, $\hat{A}$-modulo: $I M_n \subset M_{n+1} \Rightarrow I^n \subset M_n \Rightarrow A/I^n \curvearrowright M/M_n$ quindi

   $(a_n)\cdot(x_n) = (a_n \cdot x_n)$ molt. per scalari

<u>Def</u>: Sia $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$ una filtrazione di M. Questa si dice:

- I-filtrazione se $I M_n \subset M_{n+1}$
- I-stabile se $I M_n = M_{n+1}$ def

<u>Oss</u>: M e siano M_n, N_n I-filtr. stabili di M allora:

$$\underset{h \geq N}{I M_h = M_{h+1}} \quad e \quad I M_n \subset M_{n+1} \rightarrow I^n M \subset M_n$$

se consideriamo $N_n = I^n M$.

Ma allora: $\exists h$ t.c. $M_{h+k} \subset N_h$ e $N_{h+k} \subset M_{h+k}$ $\forall k$

infatti $I^{h+k} M \subset M_{h+k}$ $\forall k, h$

$M_{h+k} = I^k M_h \subset I^k M \subset N_k \quad \forall k$

$\rightarrow \{M_n\}$ e $\{I^k M\}$ inducono la stessa top su M

Quindi $\varprojlim M/M_n \simeq \varprojlim M/I^n M \simeq \hat{M}$ completamento di M rispetto alla top I-adica

[Artin-Rees] A noeth. M A-mod f.g., $\{M_n\}$ I-filtrazione stabile di M, N sottomodulo $N_n = M_n \cap N$ allora N_n I-filtr. I-stabile di N

(domani)

<u>Def</u>: $A \supset I$ ideale: scoppiamento di A in I è $Bl_I(A) = A \oplus I \oplus I^2 \oplus I^3 \oplus \_\_$

diciamo $\left. \begin{matrix} x_h \in I^h \text{ è "in grado } h\text{"} \\ x_k \in I^k \text{ è in grado } k \end{matrix} \right\}$ $x_h x_k$ è in grado $h+k$

M modulo, $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \cdots$ I filtrazione allora

$Bl(M) = M \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \cdots$

e si considera come $Bl_I(A)$-modulo

Altre cose: 11/05

A $\mathbb{k}$-fin. generato, $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$, m ideale massimale

$\Rightarrow \hat{A_m} = \varprojlim A/m^n$

ex: $\mathbb{k} = \mathbb{C}$: $A = \dfrac{\mathbb{C}[x_1, -, x_n]}{(f_1, -, f_a)}$, $B = \dfrac{\mathbb{C}[y_1, -, y_m]}{(g_1, -, g_b)}$. $Y = \mathrm{Max}\, A \subset \mathbb{C}^n$
$X = \mathrm{Max}\, B \subset \mathbb{C}^m$

Data $\varphi : A \to B \Rightarrow \phi : X \to Y$

Omeomorfismi / diffeomorfismi locali:

Se $B = \dfrac{\mathbb{C}[x, y]}{y^2 = x^3 - x}$, $A = \mathbb{C}[x]$ $\quad \varphi : \begin{array}{c} A \\ x \end{array} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \end{array} \begin{array}{c} B \\ \bar{x} \end{array}$

$\phi : X \to Y$, $X \cong (x, y) : y^2 = x^3 - x$, $Y \cong \mathbb{C}$

Pongo $Y' \cong Y \setminus \{0, 1, -1\}$
$= \mathrm{Max}\left(\mathbb{C}[x]_{x^3 - x}\right) \to X' = \mathrm{Max}\left(\dfrac{\mathbb{C}[x, y]_{x^3 - x}}{y^2 = x^3 - x}\right)$

$\Rightarrow \phi : X' \to Y'$

m ideale max di B, $n = m^c \subset A$ max : $\hat{B}$ rispetto a m
$\hat{A}$ rispetto a n

$\hat{A} \to \hat{B}$ possono essere isomorfi, mentre $A_n \not\cong B_m$

Abbiamo: A e I ideale

Lemma A noetheriano $\Rightarrow Bl_I(A) = A \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots$ è noetheriano

Dim: A noetheriano $\Rightarrow I$ fin. generato come A-modulo

Siano $x_1, -, x_n$ generatori di I li metto in grado 1

$\Rightarrow$ Dimostriamo che $Bl_I(A)$ generato da $x_1, -, x_n$ come A-algebra per induzione su m, vediamo $I^m \subset A[x_1, -, x_n]$

P.B.: $m = 0$ ✓ (grado 0)
$m = 1 \Rightarrow u \in I : u = \sum a_i x_i \quad a_i \in A$ in $Bl_I(A)$
(grado 1) (grado 1) (grado 0)

P.I.: $m > 1$: $u \in I^m$ elemento di grado m : $u = \sum x_i b_i \quad b_i \in I^{m-1}$
(grado 1) (grado m-1)

per ip $b_i \in A[x_1, -, x_n] \; \forall i$
$\Rightarrow u \in A[x_1, -, x_n]$

A anello, I ideale, M A-modulo fin. generato e sia $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots$ una I-filtrazione

$\Rightarrow Bl_m(M) = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots$ è un $Bl_I(A)$-modulo graduato

A noetheriano, M fin.gen

Lemma $Bl_{\mathcal{M}}(M)$ è fin.gen su $Bl_I(A) \iff \mathcal{M}$ è I-stabile

Dim. ($\Leftarrow$) $\mathcal{M}$ stabile: $\exists\, n$ t.c. $M_{n+h} = I^h M_n \;\; \forall h$, quindi:

$$Bl_{\mathcal{M}}(M) = M \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus M_{n+h} \oplus \cdots$$

Siano $(x_0, \dots, x_N)$ dei generatori di M_0, di $M_1, \dots,$ di M_n, dico che questi generano $Bl_{\mathcal{M}}(M)$ come $Bl_I(A)$-modulo:

- Generano $M_0 \oplus \cdots \oplus M_n$ come A-modulo
- Generano $M_{n+h} = I^h M_n = \langle \{ \sum x_i b_i \mid x_i \in I^h, b_i \in M_n \} \rangle$

($\Rightarrow$) $\exists\, N$ t.c. $M_0 \oplus \cdots \oplus M_N$ generano $Bl_{\mathcal{M}}(M)$ su $Bl_I(A)$

Dimostro $M_{N+h} = I^h M_N \quad \forall h \geq 0$.

$$M_{N+h} \overset{\subseteq}{=} I^{N+h} M \oplus I^{N+h-1} M_1 \oplus \cdots \oplus I^h M_N \quad \text{ma} \quad I^{N+h-n} M_n \subset M_N$$
$$\Rightarrow M_{N+h} = I^h M_N$$

Lemma [Artin-Rees] A noetheriano, I ideale di A, M A-mod f.gen, $N \subset M$

Data $\mathcal{M}: M \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ I-filtrazione stabile, trovo
$\mathcal{N}: N \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$ dove $N_i = M_i \cap N$

$\Rightarrow$ $\mathcal{N}$ è una I-filtrazione stabile di N

Dim: Guardo $Bl_{\mathcal{M}}(M)$: è un $Bl_I(A)$-modulo fin.generato

$Bl_{\mathcal{N}}(N) = N_0 \oplus N_1 \oplus \cdots \subseteq Bl_{\mathcal{M}}(M)$ sottomodulo (via $Bl_I(A)$)

Ma $Bl_I(A)$ noetheriano, $Bl_{\mathcal{M}}(M)$ fin gen su $Bl_I(A)$ noetheriano
$\Rightarrow$ anche $Bl_{\mathcal{N}}(N)$ è fin gen su $Bl_I(A)$ $\xrightarrow[\text{Lem.}]{}$ $\mathcal{N}$ I-stabile

Prop: Sia A noetheriano, I-id di A e supponiamo $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ esatta di A-mod f.g.

$$\Rightarrow \hat{M} = \varprojlim \frac{M}{I^n M} = \varprojlim \frac{M}{M_n} \quad \forall \text{ filtr. } I\text{-stabile} \quad \text{e}$$

$$0 \to \hat{M'} \xrightarrow{i} \hat{M} \xrightarrow{\pi} \hat{M''} \to 0 \text{ è esatta}$$

Dim: Sia M_n una I-filtrazione stabile di M: questa induce

$M'_n = M' \cap M_n$ e $M''_n = \pi(M_n)$

I-stabile per Artin-Rees — I-stabile per linearità

Inoltre $0 \to \frac{M'}{M'_n} \to \frac{M}{M_n} \xrightarrow{\bar{\pi}} \frac{M''}{M''_n} \to 0$ esatta $\forall n$

$\bar{\pi}(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \pi(x) \in M''_n = \pi(M_n)$: $\exists\, y \in M_n$: $\pi(x-y) = 0$
$\rightarrow x - y \in M'$ ovvero $x = y + z$ con $y \in M_n$, $z \in M'$
$\rightarrow \bar{x} = \bar{z} \in M'/M'_n$

Per dimostrare la tesi basta far vedere $\frac{M'}{M'_n} \to \frac{M'}{M'_{n-1}}$ surg ($M_n \subset M_{n-1}$) che è vero

$\Rightarrow 0 \to \hat{M'} \to \hat{M} \to \hat{M''} \to 0$ esatta.

Lemma M A-modulo fin gen: 1) $\gamma: \hat{A}\otimes_A M \twoheadrightarrow \hat{M}$ surg. $(M \hookrightarrow \hat{M})$
$a\otimes m \mapsto a\cdot m$
2) A noetheriano, γ isomorfismo

Dim: 1) $M \simeq A^h$ ovvio $(\hat{M} \simeq \hat{A}^h)$
In generale M fin gen: $A^h \to M \to 0$ per qualche h

Guardo $0 \to N \hookrightarrow A^h \to M \to 0$ fin generata
$I^n A^h \cap N = \{I^n N\} \subset$ $\{I A^h\} \supset$ $\{I^n M\} \supset$
I-stabili

$\Rightarrow$ trovo una mappa surgettiva $\hat{A}^h \twoheadrightarrow \hat{M} \to 0$

Inoltre $\hat{A}\otimes_A$ esatto a dx: $\hat{A}\otimes_A A^h \twoheadrightarrow \hat{A}\otimes_A M \to 0$ $\to$ (γ surg)

2) A noeth: $0 \to N \to A^h \to M \to 0 \implies$
$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \hat{N} & \to & \hat{A}^h & \to & \hat{M} & \to 0 \\ & \uparrow & & \wr\wr & & \uparrow\gamma & \\ & \hat{A}\otimes N & \to & \hat{A}^h & \to & \hat{A}\otimes_A M & \to 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ (Lemma del serpente) γ isomorfismo

$\to$ **Cor** A noetheriano, I ideale di A: $\hat{A}$ piatto su A

Dim: (I due lemmi + M non è piatto $\Leftrightarrow \exists\ X, Y$ fin gen: $X \hookrightarrow Y$ iniettivo ma $M\otimes X \to M\otimes Y$ no.)
Oppure $\hat{A}$ piatto $\Leftrightarrow \forall\ 0 \to J \to A$ J id di A vale $\hat{A}\otimes_A J \to \hat{A}\otimes_A A$ iniettiva

A anello noeth, I ideale, M A-modulo, M fin gen: $\bigcap I^n M = \{x \in M : \exists a \in I : (1-a)x = 0\}$

Infatti: $\supseteq$: $(1-a)x = 0 \Rightarrow x = \underset{\in IM}{ax} = \underset{\in I^2M}{a^2x} = \dots \in \bigcap I^n M$

$\subseteq$: Sia $N = \bigcap I^n M$: voglio $\boxed{IN = N}$

Se lo dimostro $\to$ N fin gen Nak $\Rightarrow \exists a \in I : (1-a)N = 0$

Vediamo $\boxed{IN = N}$:

[Artin-Rees]
$N_n = N \cap (I^n M)$: $M: N_0 \supset N_1 \supset \dots \supset N_n \supset \dots$ è una I-filtraz stabile

$N_n = N\ \forall n$ per def e $IN_n = N_{n+1}$ $\to$ $IN = N$

Cor: A noetheriano, I ideale $\neq A$, allora:
1) A dominio: $\bigcap I^n = 0$
2) A locale, M f.g: $\bigcap I^n M = 0$

Dim: 1) $I = 0$ ovvio, I generico: $x \in \bigcap I^n$ $\exists a \in I$: $(1-a)x = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$
$a \neq 1$ dominio
2) $x \in \bigcap I^n M$: $\exists a \in I$, $(1-a)x = 0$ ma $1-a \in A^*$

② ALGEBRA OMOLOGICA

A non commutativo
A mod = A modulo sx

- $F : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ $F(X) = \mathrm{Hom}(M, X)$ con M fissato

$\alpha : X \to Y \Rightarrow F(\alpha) : \mathrm{Hom}(M,X) \to \mathrm{Hom}(M,Y)$
$f \mapsto \alpha \circ f$

ed è tale che $\underbrace{0 \to X \to Y \to Z}_{\text{esatta}} \longrightarrow 0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ esatta

$\mathrm{Hom}(M, \cdot)$ è esatto a sx

- $F(X) = M \otimes X$ è invece esatto a destra

$\Rightarrow 0 \to Y \to A^h \to X \to 0 \Rightarrow ?\ M\otimes Y \to M \otimes A^h \to M \otimes X \to 0$

Continuando a spezzare $Y = A^{h_1}/Y_1$ e così via ho:

$$\dots \to A^{h_2} \xrightarrow{\alpha_2} A^{h_1} \xrightarrow{\alpha_1} A^h \xrightarrow{\alpha} X \to 0$$ da cui ottengo

$$A^{h_2}\otimes M \to A^{h_1} \otimes M \xrightarrow{F\alpha_1} \underbrace{\boxed{A^h \otimes M}}_{\text{esatta}} \xrightarrow{F\alpha} \underbrace{\boxed{X \otimes M}}_{\text{esatta}} \to 0$$

$$\Rightarrow M \otimes X \simeq \frac{A^h \otimes M}{\ker F\alpha} \simeq \frac{A^h \otimes M}{\mathrm{Im}\, F\alpha_1} = \operatorname{coker} F\alpha_1 \quad \text{dove } M^{h_1} \xrightarrow{F\alpha_1} M^h$$

$\Rightarrow$ L'idea è sostituire un modulo con una successione esatta di moduli più semplici (ad esempio moduli liberi)
con delle proprietà migliori

* CATEGORIA di COMPLESSI

Def: Amod è la categoria degli A-moduli $\Rightarrow$ C(Amod) è la categoria i cui oggetti sono i (co)-complessi di A-moduli ovvero:

$$\to X^{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} X^n \xrightarrow{\partial_n} X^{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} X^{n+2} \to \dots \quad \text{con } \partial_n \circ \partial_{n-1} = 0 \ \forall n$$

e dove i morfismi di complessi sono $(f_n : X^n \to Y^n)_n$ t.c.

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{\partial} & X^n & \xrightarrow{\partial_n^X} & X^{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} \\
 & \downarrow f_{n-1} & \circlearrowleft & \downarrow f_n & \circlearrowleft & \downarrow f_{n+1} & \\
\dots \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^Y} & Y^n & \xrightarrow{\partial_n^Y} & Y^{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^Y}
\end{array}
\qquad \partial_n^Y f_n = f_{n+1} \partial_n^X \quad \forall n$$

Ci sono delle sottocategorie:

$C^+ \ni \{X^n\} \Rightarrow X^n = 0$ per $n < \bar{N}$ limitati dal basso

$C^- \ni \{X^n\} \Rightarrow X^n = 0$ per $n > \bar{N}$ limitati dall'alto

$C^b \ni \{X^n\} \Rightarrow X^n = 0$ per $|n| > N$ limitati

Se $\{X^n\}$ è un complesso, allora: $H^n(X) := \dfrac{\ker \partial_n^X}{\mathrm{Im}\, \partial_{n-1}^X}$ (coomologia n-esima del complesso)

Se $\varphi^\bullet$ è di complessi: $\varphi^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, allora

$\varphi_n : X^n \to Y^n$ t.c. $\varphi^n(\ker \partial_n^X) \subset \ker \partial_n^Y$

$\varphi^n(\mathrm{Im}\, \partial_{n-1}^X) \subset \mathrm{Im}\, \partial_n^Y$ quindi induce

$H^n(\varphi) : H^n(X) \to H^n(Y)$

<u>Def</u>: dico che una mappa φ di complessi è un quasi isomorfismo se $H^n(\varphi)$ è un isomorfismo $\forall n$

<u>ex</u>: Dato M consideriamo la sua ris. libera: $\dots \to F^{-2} \xrightarrow{\partial^{-2}} F^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} F^0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ esatta con F^i liberi.

Abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & F^{-2} \arrow[r, "\partial^{-2}"] \arrow[d] & F^{-1} \arrow[r, "\partial^{-1}"] \arrow[d] & F^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \cdot & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
\qquad
\left.\begin{array}{c} F^\bullet \\ \downarrow \varepsilon^\bullet \\ M^\bullet \end{array}\right\} \text{mappa di complessi}$$

e sono tutti commutativi ($\varepsilon \partial^{-1} = 0$ per esattezza)

$$H^n(F^\bullet) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \text{ (esattezza)} \\ M & n = 0 \end{cases} \qquad H^n(M) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ M & n = 0 \end{cases}$$

Quindi $\varepsilon^\bullet$ è un quasi isomorfismo

Allora: $\cdot \otimes X = F(\cdot)$ $\dots \to F(F^{-2}) \to F(F^{-1}) \to F(F^0) \to 0 \dots$

$\Rightarrow F(M) = H^0(F(F^\bullet))$ perché F esatto a dx

<u>Def</u>: Se M è un modulo, una risoluzione proiettiva di M è

$\dots \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$ succ. esatta con P^i proiettivi

e una risoluzione iniettiva di M è

$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$ succ. esatta con I^i iniettivi

È chiaro che ogni modulo ha una risoluzione proiettiva (in part. libera)

- P proiettivo: $\forall$
$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, "\psi"'] & \\
X \arrow[r, "\varphi"'] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
$\exists\, \psi$ t.c. $\varphi\psi = \alpha$

- I iniettivo: $\forall$
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[dl, "\psi"] \\
 & I &
\end{tikzcd}$$
$\exists\, \psi$ t.c. $\psi\alpha = \varphi$

<u>Oss</u>: P proiettivo sse $\mathrm{Hom}(P, \cdot)$ esatto

I iniettivo sse $\mathrm{Hom}(\cdot, I)$ esatto

Oss - $\oplus P_i$ proiettivo $\Leftrightarrow$ P_i proiettivo $\forall i$

- $0 \to X \to Y \xrightarrow{\varphi} P \to 0$ esatta $\Rightarrow$ spezza: $Y \simeq P \oplus X$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] & P \\ & P \arrow[u, "id"'] \arrow[ul, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

Quindi P proiettivo $\Leftrightarrow$ P addendo diretto di F libero (solo nei moduli)

- $\prod I_j$ iniettivo $\Leftrightarrow$ I_j iniettivo $\forall j$

- $0 \to I \to Y \to Z \to 0$ esatta $\Rightarrow$ spezza: $Y \simeq I \oplus Z$
I iniettivo

Vogliamo dimostrare che ogni modulo ha una ris. iniettiva

Teo: M A-modulo $\exists I$ A-modulo iniettivo e $\varphi: M \to I$ iniettiva

Vediamo prima alcuni risultati:

Teo: I iniettivo se e solo se $\forall$
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[dl, "\gamma"] \\ & I & \end{tikzcd}$$
$\exists \gamma: A \to I$ $\gamma\alpha = \beta$

Dim:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & Y \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$
possiamo supporre $X \subset Y$:

considero $\mathcal{F} = \{(Z, \delta)$ t.c. $X \subset Z \subset Y$, $\delta: Z \to I$, $\delta_{|X} = \gamma\} \ni (X, \gamma)$

Se $\{(Z_i, \delta_i) \subseteq (Z_{i+1}, \delta_{i+1}) \subseteq \dots$ $\Rightarrow$ $Z = \cup Z_i$
$\begin{cases} Z_i \subset Z_{i+1} \\ \delta_{i+1}|_{Z_i} = \delta_i \end{cases}$
$\delta: Z \to I$ t.c. $\delta(z) = \delta_i(z)$ $z \in Z_i$
è un maggiorante

$\Rightarrow \exists (Z, \delta)$ max in $\mathcal{F}$: dimostro $Z = Y$

Supp. p.a. che $\exists$ $y \in Y \setminus Z$ e consideriamo

$A \xrightarrow{\pi} Y$: guardo $J = \pi^{-1}(Z)$:
$a \mapsto ay$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & J \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta\pi"'] & A \arrow[dl, "\varphi"] \\ & I & \end{tikzcd}$$
e φ è tale che $\varphi_{|J} = \delta\pi$

$\Rightarrow W = Z + Ay \supsetneq Z$

$\hat{\delta}: W \longrightarrow I$ t.c. $\hat{\delta}_{|Z} = \delta$

$W = \dfrac{Z \oplus A}{\tilde{J}}$ $\Rightarrow$ $Z \oplus A \to W$ e ker è $\{(-jy, j)\}$
$(z, a) \mapsto z + ay$

$\tilde{J} = \{(-jy, j) : j \in J\}$ Allora: $\tilde{\delta}: Z \oplus A \to I$
$(z, a) \mapsto \delta(z) + \varphi(a)$

e $\tilde{\delta}(-jy, j) = \delta(-jy) + \varphi(j)$
$= \delta(-jy) + \delta(jy) = 0$ $\Rightarrow$ $\tilde{\delta}$ passa a $\hat{\delta}: W \to I$

Ora $\hat{\delta}|_X = \delta|_X = \gamma$ $\to$ $(W, \hat{\delta}) \in \mathcal{F}$, assurdo: $Y = Z$.

Cor A PID: I iniettivo $\Leftrightarrow$ I divisibile per A:
$\forall a \in A - \{0\}$, $m \in I$ $\Rightarrow$ $\exists n \in I$ t.c. $m = an$

a $(a) \to A$ 1
$\to m = a \cdot n$
m I n

Ex: - $\mathbb{Q}$ gruppo abeliano iniettivo
- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo iniettivo e $\prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ si dice modulo colibero

Lemma: Per $A = \mathbb{Z}$ il teorema è vero

Dim 1. Costruisco (dato M $\mathbb{Z}$-modulo) $\forall m \in M \setminus \{0\}$: $\varphi_m : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tale che $\varphi_m(m) \neq 0$

$$\mathbb{Z}m \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}m \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ m \mapsto 1/2 \\ \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \mathbb{Z}m \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ m \mapsto 1/N \end{cases} \to \begin{tikzcd} \mathbb{Z}m \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \\ M \arrow[ur, "\varphi_m"'] \end{tikzcd}$$

iniettivo

2. Guardo $\phi : M \longrightarrow \prod_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ con $\phi(x) = (\varphi_m(x))_{m \in M}$

$$\phi(m) = (\varphi_n(m))_n \neq 0 \text{ perché } \varphi_m(m) \neq 0 \to \phi \text{ iniettivo}$$

Lemma: Se $f : A \to B$ anelli, M A-modulo come deriviamo — 11/11

$M_B = \mathrm{Hom}_A(B, M)$ è un B-modulo con $(b\varphi)(x) = \varphi(xb)$

$\Rightarrow$ N B-modulo esiste $\mathrm{Hom}_B(N, M_B) \simeq \mathrm{Hom}_A(N, M)$

$$(\Psi(n))(x) = \psi(xn) \longleftarrow\!\shortmid\ \psi$$
$$\Psi \longmapsto \psi(n) = \Psi(n)(1_B)$$

Dim: - $\Psi(bn)(x) = \psi(xbn) = (b\Psi(n))(x)$ che è vero (

- $\psi \mapsto \Psi \mapsto \Psi(n)(1_B) = \psi(n)$ ✓

$\Psi \mapsto \Psi(\cdot)(1_B) \mapsto \phi$ che è tale che $(\phi(n))(x) = \Psi(xn)(1_B)$
$= (x.\Psi(n))(1_B) = \Psi(n)(x)$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_B(N, M_B) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_A(N, M)$ dove gli isomorfismi α e β sono naturali

N, N' B-moduli $g : N' \to N$ di B-mod
M, M' A-moduli $f : M \to M'$ di A-mod $\rightsquigarrow f_B : M_B \to M_B'$, $\varphi \mapsto f(\varphi(\cdot))$

Allora
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_B(N, M_B) \arrow[r, "f_B \circ - \circ g"] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_B(N', M_B') \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_A(N, M) \arrow[r, "f \circ - \circ g"'] & \mathrm{Hom}_A(N', M') \end{tikzcd}$$

Da questo segue: $\boxed{M \text{ iniettivo} \Rightarrow M_B \text{ iniettivo}}$

Detto meglio: $G : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ $(M \mapsto M_B)$
$F : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$ $(N \mapsto N)$
$\mathrm{Hom}_B(N, G(M)) \simeq \mathrm{Hom}_A(F(N), M)$
naturale

$\Rightarrow$ • F è esatto a dx

(2) • G è esatto a sx

(3) • Se F è esatto $\Rightarrow G$ manda iniettivi in iniettivi
Se G è esatto $\Rightarrow F$ manda proiettivi in proiettivi

(2): $0 \to X \xrightarrow{\psi} Y \xrightarrow{\phi} Z$ esatta $\Rightarrow 0 \to GX \xrightarrow{G\psi} GY \xrightarrow{G\phi} GZ$ esatta

Cioè:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & GX \arrow[r] & GY \arrow[r, "G\phi"] & GZ \\ & & n \arrow[ul, dashed, "\beta g"] \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$
$n \in \ker G\phi$

ad $f \in Hom_B(n, GY) \stackrel{\alpha}{\simeq} Hom_A(F(n), Y)$ corrisponde $\alpha(f)$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\psi"] & Y \arrow[r, "\phi"] & Z \\ & & F(n) \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[u, "\alpha f"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$
e α naturale $\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} \alpha f \in Hom(Fn, Y) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & Hom(Fn, Z) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ f \in Hom(n, GY) \arrow[r, "G\phi \circ"] & Hom(n, GZ) \ni 0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F(n) \in \ker \phi = Im \psi : \exists!\ x \in X : (\alpha f)(Fn) = \psi x$

e analogamente $\exists!\ g : Fn \to X$ t.c. $\psi g = \alpha f$

$\Rightarrow \beta(g)$ è l'unica mappa t.c. $G\psi \circ \beta g = f$

TEO: M A-modulo allora $\exists$ I A-mod iniettivo t.c. $\varphi : M \to I$ iniettiva

Dim: Scelgo nella costruzione precedente, $B = A$, $A = \mathbb{Z}$.

Se considero M come $\mathbb{Z}$-modulo $\exists$ $M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} I$ di $\mathbb{Z}$-moduli iniett. con I $\mathbb{Z}$-mod iniett.

$\Rightarrow$ trovo $M \xrightarrow{\phi} I_A$ iniettiva e con I_A iniettivo

$(\phi(m))(x) = \varphi(xm) = 0 \iff \phi(m)(1) = \varphi(m) = 0\ \forall m \to \varphi = 0$

TEO: $M^\cdot$ un complesso di A-moduli, limitato dal basso. Allora $\exists$ $I^\cdot$ complesso limitato dal basso, $\varphi : M^\cdot \to I^\cdot$ quasi isomorfismo tale che $\varphi^j : M^j \to I^j$ iniettiva e I^j iniettivo $\forall j$

Oss: nel caso particolare: $\cdot$ $0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdot$

$\mapsto$ Ho una risoluzione iniettiva di M.

viene fuori dalla dim. $\quad 0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \dots$

exatta perché è un q.i.

Dim: Supponiamo $M^i = 0$ per $i < 0$, e costruisco $\{(I^n, \partial_n^I)\}$ per ind. su n

P.B $I^n = 0$, $\partial_n^I = 0$ $\forall n < 0$

I^0 t.c. $M^0 \overset{\varphi^0}{\hookrightarrow} I^0$ iniettivo:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r, "\partial_1^M"] \arrow[d, hook, "\varphi^0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M^1 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & \frac{I^0 + M^1}{\{(\varphi^0(x), -\partial_1^M(x))\}} \subset I^1 \end{tikzcd}$$

Scelgo I^1 iniettivo che contenga $\frac{I^0 + M^1}{\{(\varphi^0(x), -\partial_1^M(x))\}}$

P. I Suppongo di avere $I^0 \xrightarrow{\partial_0^I} I^1 \to \cdots \xrightarrow{\partial_{n-1}^I} I^{n-1}$ e $\varphi^0, \dots, \varphi^n$ tali che:

$H^i(\varphi)$ isomorfismo $i<n$ e $\overline{\varphi}^n : \frac{M^n}{\operatorname{Im} \partial_{n-1}^M} \to \frac{I^n}{\operatorname{Im} \partial_{n-1}^I}$ iniett.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"'] & M^1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"'] & \cdots \arrow[r] & M^{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n-2}"'] & M^{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^M"] \arrow[d, "\varphi^{n-1}"'] & M^n \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^n"'] & M^{n+1} \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & I^{n-2} \arrow[r] & I^{n-1} \arrow[r] & I^n &
\end{tikzcd}$$

Guardiamo:

$$\begin{tikzcd}
X = \frac{M^n}{\operatorname{Im}\partial_{n-1}^M} \arrow[r, "\overline{\partial_n^M}"] \arrow[d, "\overline{\varphi}_n"'] & M^{n+1} \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\varphi^{n+1}"] & \\
Y = \frac{I^n}{\operatorname{Im}\partial_{n-1}^I} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right, "\partial_n^I"'] & \frac{Y \oplus M^{n+1}}{\{(\overline{\varphi}_n(x), -\overline{\partial}_n^M(x))\}} & \subset I^{n+1} \text{ iniettivo}
\end{tikzcd}$$

- commuta per costr.
- φ^{n+1} iniettiva: basta β iniettiva ma se $\beta(m)=0 \Rightarrow (0,m) = (\overline{\varphi}_n(x), -\overline{\partial}_n^M(x))$
  $\to \overline{\varphi}_n(x) = 0 \to x = 0$
  $\Rightarrow m = \partial_n^M(x) = 0$
- $y \in Y$ t.c. $\alpha(y) = 0 \Rightarrow \alpha(y) = (y,0) = (\overline{\varphi}_n(x), -\overline{\partial}_n^M(x))$
  $\to \overline{y} = \overline{0} \to y \in \operatorname{Im} \partial_{n-1}^I$
- $\overline{\varphi^{n+1}} : \frac{M^{n+1}}{\operatorname{Im}\partial_n^M} \to \frac{I^{n+1}}{\operatorname{Im}\partial_n^I}$ è iniettiva

$x \in M^{n+1} \Rightarrow (0,x) = (y,0) + (\overline{\varphi}^n(z), -\overline{\partial}_n^M(z))$ $\quad y = \overline{\varphi}^n(z)$, $x = -\overline{\partial}^n(z)$

$\Rightarrow \overline{\varphi}^{n+1}(\overline{x}) = \overline{\varphi}^{n+1}(-\overline{\partial}^n(z)) = \alpha\, \overline{\varphi}_n(z) = 0 \iff z = 0$

<u>Def</u>: F: Amod $-$ Bmod funtore esatto a sx, $M^\cdot$ complesso lim dal basso $M^\cdot \xrightarrow{\varphi^\cdot} I^\cdot$ quasi isomorfismo con $I^\cdot$ complesso iniettivo, definisco i FUNTORI DERIVATI $R^j(F(M^\cdot)) = H^j(F(I^\cdot))$

Se F fosse stato esatto a dx, preso $M^\cdot$ lim dall'alto, $\varphi^\cdot : M^\cdot \to P^\cdot$ con $P^\cdot$ complesso proiettivo lim dall'alto

e si definisce $L^j(F(M^\cdot)) = H^{-j}(F(P^\cdot))$

<u>Oss</u>: Se $M^\cdot$ è $0 \to 0 \to M \to 0 \to 0 \to \cdots$ voglio che $R^0F(M) = FM$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
& 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

$\} 0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$ esatta
$\Rightarrow 0 \to FM \to FI^0 \to FI^1$ ex

ed in effetti $H^0(F(I^\cdot)) = \ker F\partial^0 = FM$

e quindi se F ~~non~~ è esatto a dx devo prendere una risoluzione a sx

$F: A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ esatto a sx $\Rightarrow R^iF: \mathrm{Com}^+(A\text{-mod}) \to B\text{-mod}$

e $M^\cdot \in \mathrm{Com}^+(A\text{-mod})$, $\varphi: M^\cdot \to I^\cdot$ quasi iso con $-I^\cdot \in \mathrm{Com}^+(A\text{-mod})$
$- I^j$ iniettivo $\forall j$

$\to R^iF(M^\cdot) = H^i(F(I^\cdot))$ in realtà non dipende da $I^\cdot$!

$\otimes$: M A-mod, A commutativo, $T = \cdot \otimes M$ esatto a dx: $\to F^{-2} \to F^{-1} \to F^0 \to N \to 0$

Allora:

$$\begin{array}{ccccccccc} \to & F^{-2} & \to & F^{-1} & \to & F^0 & \to & 0 & \to \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & \to & 0 & \to & N & \to & 0 & \to \end{array}$$

$\Rightarrow \to T(F^{-2}) \to T(F^{-1}) \to T(F^0) \to 0$

$L^iT(N) = H^i(T(F^\cdot))$

ex: $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: $T(X) = X \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq X/mX$

Scelgo $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0$

$\Rightarrow N^\cdot$ quasi isomorfo a $\to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$ $\quad F^\cdot$

Adesso $T(F^\cdot)$: $0 \to \mathbb{Z}\otimes M \xrightarrow{\cdot n \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z}\otimes M \to 0 \to \cdots$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\otimes M & & \mathbb{Z}\otimes M \\ \| & & \| \\ M & \xrightarrow{\cdot n} & M \end{array}$$

$M \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Ora $L^0T(N^\cdot) = H^0(T(F^\cdot)) = M/nM \simeq \dfrac{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = \begin{cases} 0 & (n,m)=1 \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & n \mid m \\ \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & d=(n,m) \end{cases}$

$L^1T(N^\cdot) = H^{-1}(T(F^\cdot)) = \ker(\cdot n) = \{x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : nx = 0\} = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$\to \mathrm{Tor}^i(M,N^\cdot) = L^iT(N^\cdot)$ dove $T(\cdot) = \cdot \otimes M$

Oss: $N^\cdot$ complesso : $\mathrm{Tor}(M,N) \simeq \mathrm{Tor}(N,M)$

Hom: A anello, M A-modulo : $h^M = \mathrm{Hom}(\cdot, M)$, $h_M = \mathrm{Hom}(M, \cdot)$

h_M esatto a sx, $\mathrm{Ext}^i(M,N^\cdot) = R^ih_M(N^\cdot)$

ex: $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$

$N^\cdot$ quasi isomorfo a $I^\cdot$ e $h_M(I^\cdot)$: $0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$

ed ho il caso di prima $\quad 0 \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to 0$

h^M esatto a sx controvariante : $h^M(N^\cdot)$ ris proiettive di $N^\cdot$

$\mathrm{Ext}^i(N^\cdot, M) = R^ih^M(N^\cdot) = H^i(h^M(F^\cdot))$

Oss: M, N moduli $\Rightarrow \mathrm{Ext}^i(M,N) \simeq \mathrm{Ext}^i(N,M)$

- La risoluzione iniettiva **non** è unica

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I & = & I & \to & 0 \end{array}$$

- Dati $\varphi, \psi : X^\cdot \to Y^\cdot$ diciamo $\varphi \sim \psi$ (φ omotopo a ψ)

$\chi \sim 0$: $\exists\ h^n : X^n \to Y^{n-1}$ t.c.

con $\chi = \varphi - \psi$

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r, "\partial_X^{n-1}"] \arrow[d, "\chi_{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "\partial_X^n"] \arrow[d, "\chi_n"] \arrow[dl, "h^n"'] & X^{n+1} \arrow[d, "\chi_{n+1}"] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] \\ Y^{n-1} \arrow[r, "\partial_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r, "\partial_Y^n"] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

se $\chi^n = \partial_Y^{n-1} h^n + h^{n+1} \partial_X^n$

Kom(A-mod) con Ob = complessi di A-moduli

$\mathrm{Hom}_{Kom}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{Com}(X, Y)/\sim$ gr abeliano

e $\chi \sim 0 \Rightarrow \varphi \circ \chi \sim 0,\ \chi \circ \psi \sim 0$ (la comp passa al quoz.)

$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r, "\partial_X^{n-1}"] \arrow[d, "\chi_{n-1}"'] & X^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h^n"'] & X^{n+1} \arrow[d] \arrow[dl, "h^{n+1}"'] \\ Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n-1}"'] & Y^n \arrow[r] \arrow[d, "\psi^n"'] & Y^{n+1} \arrow[d] \\ Z^{n-1} \arrow[r, "\partial_Z^{n-1}"] & Z^n \arrow[r] & Z^{n+1} \end{tikzcd}$$

$\chi \sim 0$ via h, allora

$k^n = \psi^{n-1} \circ h^n \quad \forall n$

$\Rightarrow (\psi^n \circ \chi^n) = \psi^n (\partial_Y^{n-1} h^n + h^{n+1} \partial_X^n)$

$= \partial_Z^{n-1} \psi^{n-1} h^n + \psi^n h^{n+1} \partial_X^n$

$= \partial_Z^{n-1} k^n + k^{n+1} \partial_X^n$

Oss: $\chi : X \to Y \quad \chi \sim 0 \Rightarrow H(\chi) : H(X) \to H(Y) \Rightarrow H(\chi) = 0$

dim: $\chi = \partial_Y h + h \partial_X$ e $H(\chi) : \dfrac{\ker \partial_X}{\mathrm{Im}\, \partial_X} \to \dfrac{\ker \partial_Y}{\mathrm{Im}\, \partial_Y}$

$[x] \mapsto [\chi(x)] = 0$

$\underset{[\partial_Y h(x)]}{\shortparallel}$

$\to \psi \sim \varphi \Rightarrow H(\psi) = H(\varphi)$

Oss: X, Y omotopicamente equivalenti se esiste $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to X$. $\psi \circ \varphi \sim Id_X$, $\varphi \circ \psi \sim Id_Y$

Teo: M, N A-moduli, $0 \to M \to I^\cdot$ risoluzione, $0 \to N \to J^\cdot$ risoluzione iniettiva, $\varphi : M \to N$ di A-moduli

$\Rightarrow \exists\ \phi : I^\cdot \to J^\cdot$ che fa commutare anche

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & I^\cdot \arrow[d, "\phi^\cdot"] \\ N \arrow[r] & J^\cdot \end{tikzcd}$$

e ϕ è UNICO A MENO DI OMOTOPIA

Dim:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\partial\varphi"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi^0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook, "\partial"] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ϕ^0 : $\partial\varphi : M \to J^0$, J^0 iniett

$\partial_I : M \to I^0$

$\Rightarrow \exists\ \phi^0 : I^0 \to J^0$ che fa comm.

Per induzione: $0 \to \frac{I^n}{I^{n-1}} \to I^{n+1}$ $\phi^n : I^n \to J^n$

$\overline{\phi}^n \downarrow \qquad \downarrow \phi^{n+1}$ ed è t.c. $\partial^n \phi = \ldots$ $\to \phi^n$ passa al qznt

$0 \to \frac{J^n}{J^{n-1}} \to J^{n+1}$

Trovo ϕ^{n+1} come prima

<u>unicità</u>: $\phi, \psi : I^\cdot \to J^\cdot$: $\chi^\cdot = \phi^\cdot - \psi^\cdot$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & I^\cdot \arrow[d, "\chi^\cdot"] \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & J^\cdot \end{tikzcd}$$

Voglio $\chi \sim 0$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "\chi^0"'] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "\chi^1"] \arrow[dl, "h^1"'] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, "\chi^2"] & \cdots \\ & N \arrow[r] & J^0 \arrow[r, "\partial"'] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Voglio costruire h^1 t.c. $h^1 \partial = \chi^0$: $\chi^0|_M = 0 \to$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \frac{I^0}{M} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\chi^0}"'] & I^1 \arrow[d, "\chi^1"] \arrow[dl, "h^1"'] \\ & J^0 \arrow[r] & J^1 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ per iniettività di J^0 trovo $h^1 : I^1 \to J^0$

Adesso voglio $h^2 \partial = \chi^1 - \partial_N^0 h^1$, cioè:

$$\begin{tikzcd} I^0 \arrow[r, "\partial^0_M"] & I^1 \arrow[r, "\partial^1"] \arrow[dl, "h^1"'] \arrow[d, "\chi^1"] & I^2 \arrow[dl, "h^2"] \\ J^0 \arrow[r, "\partial^0_N"'] & J^1 & J^2 \end{tikzcd}$$

Ovvero che: $(\chi^1 - \partial_N^0 h^1)\partial_M^0 = \chi^1 \partial_M^0 - \partial_N^0 \chi^0$
$= \partial_N^0(\chi^0 - h^1 \partial_N^0)$
$= 0$

Nel caso gen: $(\chi^n - \partial_N^{n-1} h^n)\partial_M^{n-1} = \partial_N^{n-1}(\chi^{n-1} - h^n \partial_M^{n-1})$
$= \underbrace{\partial_N^{n-1}\partial_N^{n-2}}_{} h^{n-1} = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\chi^1 - \partial_N^0 h^1}_{\tilde{\chi}}$ passa al qznt: $\frac{I^1}{\mathrm{Im}\,\partial^0} \to J^1$ e J^1 iniettivo
$\Rightarrow h^2 : I^2 \to J^1$
t.c. $h^2 \overline{\partial^1} = \tilde{\chi}$ ✓

$\to \chi \sim 0$

<u>Cor</u>: 1) M A-modulo : $0 \to M \to I^\cdot$, $0 \to M \to J^\cdot$ $\Rightarrow$ $\exists!\ \phi : I^\cdot \to J^\cdot$, $\exists!\ \psi : J^\cdot \to I^\cdot$

tale che $\psi \circ \phi \sim \mathrm{id}_{I^\cdot}$, $\phi \circ \psi \sim \mathrm{id}_{J^\cdot}$

2) $\varphi : M \to N$, $M \to I^\cdot$, $N \to J^\cdot$ $\Rightarrow \exists\ \phi : I^\cdot \to J^\cdot$ come nel teo

<u>Def</u>: M un A-mod, $F : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ esatto a sx, allora:

$$R^n F(M) = H^n(F(I^\cdot)) \quad \text{dove } M \to I^\cdot \text{ risoluz. iniettiva}$$

Se $J^\cdot$ è un'altra ris iniettiva di M, $0 \to M \underset{\phi \downarrow \uparrow \psi}{\to} I^\cdot$, $M \to J^\cdot$ $\phi \circ \psi \overset{k}{\sim} \mathrm{id}_J$ $\psi \circ \phi \overset{k}{\sim} \mathrm{id}_I$

(1) $\Rightarrow \boxed{F(\phi) \circ F(\psi) \overset{Fh}{\sim} \mathrm{id}_{FJ}}$ ed analog.

e questo implica che vale $H(F(I)) \xrightarrow{H(F\phi)} H(F(J)) \xrightarrow{H(F\psi)} H(F(I))$

(2) $\Rightarrow H(F(I)) \cong H(F(J))$ ← non dipende dalla scelta di ϕ, ψ

Verifichiamo:

(1) $\chi: X^\cdot \to Y$, $\chi \overset{h}{\sim} 0$:
$$\begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & X^{n+1} \arrow[d] \arrow[dl] \\ Y^{n-1} \arrow[r] & Y^n \arrow[r] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

e $\chi = \partial h + h \partial$

e se applico F vale:
$$F\partial \circ Fh + Fh \circ F\partial = F\chi \Rightarrow F\chi \overset{Fh}{\sim} 0$$

(2) Φ, Ψ unici a meno di omotopia e si verifica che H dipende solo da I, J

Inoltre: $\varphi: M \to N \Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & I^\cdot \arrow[d, "\phi"] \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & J^\cdot \end{tikzcd} \quad e \quad \begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & I^0 \arrow[d, "\phi^0"] \\ N \arrow[r] & J^0 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow F\phi: FI^\cdot \to FJ^\cdot$ e troviamo $H^n(F\phi): R^n(F(M)) \to R^n(F(N))$

Dall'unicità di ϕ a meno di isomorfismo segue: $H^n F\phi$ non dipende da ϕ
$$H^n F\phi = R^n F\varphi$$

e vale
- $R^n F\varphi \circ R^n F\psi = R^n F(\varphi \circ \psi)$
- $R^n F(\varphi + \psi) = R^n F\varphi + R^n F\psi$

abbiamo def i FUNTORI DERIVATI

Oss: in generale NON è vero che $M^\cdot \overset{q.i.}{\to} N^\cdot \Rightarrow FM^\cdot \overset{q.i.}{\to} FN^\cdot$

Data $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \to 0$ vale:
$$0 \to \underbrace{\underset{\substack{\| \\ FM}}{R^0FM} \xrightarrow{R^0F\alpha} \underset{\substack{\| \\ FN}}{R^0FN} \to \underset{\substack{\| \\ FP}}{R^0FP}}_{\text{l'esattezza fin qui è data da } F \text{ esatto a sx}} \xrightarrow{\omega_0} R^1FM \to R^1FN \to R^1FP \xrightarrow{\omega_1} R^2FM \to \cdots$$
è esatta

<u>Lemma</u>: $0 \to X^\cdot \xrightarrow{\alpha} Y^\cdot \xrightarrow{\beta} Z^\cdot \to 0$ succ. esatta corta ($0 \to X^n \to Y^n \to Z^n \to 0$ $\forall n$)

$\Rightarrow$ $H^n(X^\cdot) \xrightarrow{H^n\alpha} H^n(Y^\cdot) \xrightarrow{H^n\beta} H^n(Z^\cdot) \xrightarrow{\omega^n} H^{n+1}(X^\cdot)$ esatta

dove ω^n è descritto esplicitamente e soddisfa la proprietà che
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & B^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & C^\cdot \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^\cdot \arrow[r] & Y^\cdot \arrow[r] & Z^\cdot \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} H^nA \arrow[r] \arrow[d] & H^nB \arrow[r] \arrow[d] & H^nC \arrow[r, "\tilde{\omega}"] \arrow[d] & H^{n+1}A \arrow[d] \\ H^nX \arrow[r] & H^nY \arrow[r] & H^nZ \arrow[r, "\omega^n"'] & H^{n+1}X \end{tikzcd}$$

<u>dim</u>: $H^n(X) = \dfrac{\ker \partial^n}{\operatorname{Im} \partial^{n-1}} = \ker \overline{\partial^n}$ dove vale $\dfrac{X^n}{\operatorname{Im}\partial^{n-1}} \xrightarrow{\overline{\partial^n}} X^{n+1}$

Abbiamo
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & Y^n \arrow[r] \arrow[d] & Z^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & X^n/\operatorname{Im}\partial^{n-1} \arrow[r] & Y^n/\operatorname{Im}\partial^{n-1} \arrow[r] & Z^n/\operatorname{Im}\partial^{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
($\ker \partial^{n-1}$ sopra Z^{n-1})

In particolare abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(X) \arrow[r, "H^n\alpha"] \arrow[d] & H^n(Y) \arrow[r, "H^n\beta"] & H^n(Z) \arrow[ddddll, bend left, "\omega"] & \\
 & \frac{X^n}{\mathrm{Im}\,\partial_X^{n-1}} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \frac{Y^n}{\mathrm{Im}\,\partial_Y^{n-1}} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \frac{Z^n}{\mathrm{Im}\,\partial_Z^{n-1}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker \partial_X^{n+1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \ker \partial_Y^{n+1} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \ker \partial_Z^{n+1} \arrow[d] & \\
 & H^{n+1}(X) \arrow[r, "H^{n+1}\alpha"'] & H^{n+1}(Y) \arrow[r, "H^{n+1}\beta"'] & H^{n+1}(Z) &
\end{tikzcd}$$

<u>Lemma</u> $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta di moduli: data $I_X^\bullet$ ris iniettiva di X, $I_Z^\bullet$ ris iniettiva di Z 11/19

esiste $I_Y^\bullet$ ris iniettiva di Y e

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_Z"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_X^\bullet \arrow[r, "\alpha^\bullet"'] & I_Y^\bullet \arrow[r, "\beta^\bullet"'] & I_Z^\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

esatta corta di complessi

<u>Dim</u>:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \arrow[dl, "\varphi"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_X^0 \arrow[r] & I_X^0 \oplus I_Z^0 \arrow[r] & I_Z^0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

esatta ovviamente.

Trovo φ per iniettività di I_X^0 $\Rightarrow$ $\varepsilon_Y(y) = (\varphi(y), \varepsilon_Z\beta(y))$

$\varepsilon_Y\alpha(x) = (\varphi\alpha(x), 0) = (\varepsilon_X(x), 0)$ e anche
$\varepsilon_Z\beta(y) = \pi\varepsilon_Y(y)$.

Vediamo che:

- ε_Y iniettiva: $\varepsilon_Y(y) = (0,0) \Rightarrow y \in \ker\varphi$, $y \in \ker \varepsilon_Z\beta \overset{\varepsilon_Z \text{ inj}}{=} \ker\beta = \mathrm{Im}\,\alpha$
$\to y = \alpha(x)$, $0 = \varphi y = \varphi\alpha(x) = \varepsilon_X(x)$
e ε_X iniettiva $\Rightarrow y = \alpha(0) = 0$

- $I_X^0 \oplus I_Z^0$ iniettivo: $I_Y^0 := I_X^0 \oplus I_Z^0$

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & I_X^0 \arrow[r] \arrow[d] & I_Y^0 \arrow[r] \arrow[d] & I_Z^0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \frac{I_X^0}{\mathrm{Im}\,\varepsilon_X} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \frac{I_Y^0}{\mathrm{Im}\,\varepsilon_Y} \arrow[r] & \frac{I_Z^0}{\mathrm{Im}\,\varepsilon_Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
 & I & & I_Z &
\end{tikzcd}$$

Situazione come in (1) e costruisco ugualmente (I_Y^1, ε_Y^1)

$\to$ continuo per induzione

<u>Teo</u>: $F: A\text{mod} \to B\text{mod}$ è (ESATTO a sx) $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ esatta
(e ADDITIVO)
$\Rightarrow$ ho una succ. esatta

$$0 \to \underset{R^0FX}{\overset{\|}{FX}} \to FY \to FZ \to R^1FX \to R^1FY \to \cdots$$

[E se ho
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
allora:
$$\begin{tikzcd} R^iFX \arrow[r] \arrow[d] & R^iFY \arrow[r] \arrow[d] & R^iFZ \arrow[r] \arrow[d] & R^{i+1}FX \arrow[d] \\ R^iFX' \arrow[r] & R^iFY' \arrow[r] & R^iFZ' \arrow[r] & R^{i+1}FX' \end{tikzcd}$$
(no dim)

<u>Dim</u>: per il lemma:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_X"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_Y"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_Z"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I_X^\bullet \arrow[r] & I_Y^\bullet \arrow[r] & I_Z^\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
esatte

e in grado n: $0 \to I_X^n \to I_Y^n \to I_Z^n \to 0$ SPEZZA (*)

(•) <u>Oss</u>: G additivo $(G(\varphi+\psi) = G\psi + G\varphi)$ allora:
$$G(X \oplus Y) = G(X) \oplus G(Y)$$

(*) Attenzione: non è vero $I_Y^\bullet \simeq I_X^\bullet \oplus I_Z^\bullet$
perché $\partial_Y = \begin{pmatrix} \partial_X & * \\ 0 & \partial_Z \end{pmatrix}$ e in generale $* \neq 0$

$\Rightarrow F$ esatto a sx $\underset{(\text{def})}{\Rightarrow}$ additivo : $0 \to F(I_X^n) \to F(I_Y^n) \to F(I_Z^n) \to 0$ è esatta

$\Rightarrow \quad 0 \to F(I_X^\bullet) \to F(I_Y^\bullet) \to F(I_Z^\bullet) \to 0$ esatta, e per il Lemma ⑤
poiché $H^n(F(I_X^\bullet)) = R^nF(X)$, ottengo
$0 \to R^0F(X) \to R^0(F(Y)) \to R^0(F(Z)) \to R^1(F(X)) \to \cdots$

Dimostriamo (•) : $X \underset{i_X}{\overset{\pi_X}{\rightleftarrows}} X \oplus Y \underset{i_Y}{\overset{\pi_Y}{\rightleftarrows}} Y$ e sia prodotto che coprodotto di $X \oplus Y$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X\oplus Y \arrow[l, two heads] \arrow[r, two heads] & Y \end{tikzcd}$$
- l'unico φ che fa commutare è $\varphi = i_X f + i_Y g$
$\rightsquigarrow$ è il prodotto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & X\oplus Y \arrow[d, "\psi"] & Y \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "k"] \\ & M & \end{tikzcd}$$
- l'unico ψ che fa commutare è $\psi = h\pi_X + k\pi_Y$
$\rightsquigarrow$ è il coprodotto

$$\Rightarrow \quad F(X) \xleftarrow{F\pi_X} F(X \oplus Y) \xrightarrow{F\pi_Y} F(Y) \quad (1)$$
$$F(X) \xrightarrow{Fi_X} F(X \oplus Y) \xleftarrow{Fi_Y} F(Y)$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi_Y i_X = 0, \quad \pi_X i_Y = 0 \\ \pi_X i_X = id, \quad \pi_Y i_Y = id \\ i_X\pi_X + i_Y\pi_Y = id_{X\oplus Y} \end{array}\right. \rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} F(\pi_Y)F(i_X) = 0 \\ F(\pi_X)F(i_X) = id_X \\ F(i_X)F(\pi_X) + F(i_Y)F(\pi_Y) = id_{F(X\oplus Y)} \end{array}\right.$$

Facciamo vedere che (1) è il prodotto di $F(X)$, $F(Y)$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "g"] & \\ F(X) & F(X\oplus Y) \arrow[l, "F\pi_X"] \arrow[r, "F\pi_Y"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

$\forall\, m\in M$ vale: $F\pi_Y\,\varphi(m) = g(m)$, $F\pi_X\,\varphi(m) = f(m)$

$$\varphi = id\circ\varphi = (Fi_X F\pi_X + Fi_Y F\pi_Y)\,\varphi$$
$$= Fi_X f + Fi_Y g \;\rightarrow \text{è unico}$$

Ed in effetti questo φ è t.c. $F\pi_Y\varphi = \underbrace{F\pi_Y Fi_X}_{=0} f + \underbrace{F\pi_Y Fi_Y}_{=id_Y} g = g$
e uguale per f.

es: vale anche il viceversa: se F ~~è add~~ manda somme dirette in somme dirette allora è additivo.

∘ $Ext^n(X,Y) = R^n Hom(X,-)$, $\underline{Ext}^n(X,Y) = R^n Hom(-,Y)$
X fissato, risolvo Y in inj; risolvo X in proiet, Y fissato

Oss: su un PID: $0\to F^{-1}\to F^0\to M\to 0$ proiettiva
risoluzioni
$0\to M\to I^0\to I^1\to 0$ iniettiva

Prop: F, G, H: Amod $\to$ Bmod funtori esatti a sx, $F\overset{\alpha}{\Rightarrow} G$, $G\underset{\beta}{\Rightarrow} H$
e $\forall\, I$ iniettivo: $0\to F(I)\xrightarrow{\alpha_I} G(I)\xrightarrow{\beta_I} H(I)\to 0$ esatta

Allora: per ogni X esiste una succ. esatta:

$$0\to R^0F(X)\to R^0G(X)\to R^0H(X)\to R^1F(X)\to\cdots$$

ed è NATURALE in X

Dim: $X\xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ ris iniettiva: $R^iF(X) = H^i(F(I^\bullet))$ e uguale G, H
Ora: $0\to F(I^\bullet)\xrightarrow{\alpha_{I^\bullet}} G(I^\bullet)\xrightarrow{\beta_{I^\bullet}} H(I^\bullet)\to 0$ esatta
da cui segue la successione esatta lunga

Prop. $Ext^n(X,Y)\simeq \underline{Ext}^n(X,Y)$
$\quad\; \| \qquad\qquad\qquad\quad \|$
$R^n Hom(X,-) \qquad R^n Hom(-,Y)$

Dim: dimostro la tesi per induzione su n:

P.B: $n=0$: $R^0 Hom(X,Y) = Hom(X,Y) \Rightarrow Ext^0(X,Y) = \underline{Ext}^0(X,Y)$
$R^0(F(Y)) = H^0F(I) = Im\,\partial^0 = F(Y)$

P.I: $n>0$: guardo:
$$0\to X'\to F^0\to X\to 0 \quad \text{con } F^0 \text{ libero}$$

applico $Hom(-,Y)$: $\underline{Ext}^{n-1}(F^0,Y)\to \underline{Ext}^{n-1}(X',Y)\to \underline{Ext}^n(X,Y)\to\cdots$

$\underline{Ext}^{n-1}(F^0,Y) = 0_{\,n>1}$, $= Hom(F^0,Y)_{\,n=1}$; $\underline{Ext}^n(X,Y) \to \underline{Ext}^n(F^0,Y) = 0$

Oss: I iniettivo $\Rightarrow R^nF(I) = 0$ per $n>0$ e uguale se prendo ris proiettive
$(I^\bullet_I = 0\to 0\to I\to 0\to 0\cdots)$

$\Rightarrow n\geq 2 \Rightarrow \underline{Ext}^n(X,Y)\simeq \underline{Ext}^{n-1}(X',Y)\overset{ip_{ind}}{\simeq} Ext^{n-1}(X',Y)\underset{(\bullet)}{\simeq} Ext^n(X,Y)$

(•) Guardiamo: $\mathrm{Hom}(X',-) \xrightarrow[-\circ b]{\alpha} \mathrm{Hom}(F^0,-) \xrightarrow[-\circ a]{\beta} \mathrm{Hom}(X',-)$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \| & & h \\ F & \xrightarrow{\alpha} & G & \xrightarrow{\beta} & H \end{array}$$

Se I è iniettivo $\Rightarrow 0 \to F(I) \to G(I) \to H(I) \to 0$ è esatta

perché $0 \to \mathrm{Hom}(X,I) \to \mathrm{Hom}(F^0,I) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(X',I) \to 0$

iniettività

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[d] & F^0 \arrow[dl] \\ I & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}(F^0,Y) \to \mathrm{Ext}^{n-1}(X',Y) \to \mathrm{Ext}^n(X,Y) \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mathrm{Ext}^n(F^0,Y)}$

Dico $\mathrm{Ext}^n(F^0,Y) = 0 \quad \forall n > 0$

Sia $0 \to Y \to I^0 \to I^1 \to \dots$ e si applica $\boxed{\mathrm{Hom}(F^0,-)}$
esatto perché F^0 libero

$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(F^0,Y) \to \mathrm{Hom}(I^0,F) \to \dots$ ancora esatta

$$\Rightarrow \mathrm{Ext}^n(F^0,Y) = \begin{cases} \mathrm{Hom}(F^0,Y) & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$$

In effetti se $n \geq 2 \Rightarrow \mathrm{Ext}^n(X,Y) \simeq \mathrm{Ext}^{n-1}(X',Y) \simeq \underline{\mathrm{Ext}}^n(X,Y)$ ✓

$\boxed{\text{Caso } n=1}$

Abbiamo trovato che $\mathrm{Hom}(F^0,Y) \to \mathrm{Hom}(X',Y) \to \underline{\mathrm{Ext}}^1(X,Y) \to 0$

$\mathrm{Hom}(F^0,Y) \to \mathrm{Hom}(X',Y) \to \mathrm{Ext}^1(X,Y) \to 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ext}^1(X,Y) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1(X,Y)$

In maniera analoga si dimostra che anche $\mathrm{Tor}^n(M,N) \cong \mathrm{Tor}^n(N,M)$

<u>Def</u>: $\mathrm{dhp}(M) = \min\{n \geq 0$: esiste una risoluz. proiettiva di M lunga $n\}$
$0 \to P^{-n} \to \dots \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$

$\mathrm{dhi}(M) = \min\{n \geq 0$: esiste una risoluz. iniettiva di M lunga $n\}$
$0 \to M \to I^0 \to \dots \to I^n \to 0$

$\mathrm{dhp}(M) = 0 \iff M$ proiettivo; $\mathrm{dhi}(M) = 0 \iff I$ proiettivo

$\mathrm{gdhp}(A) = \max\{\mathrm{dhp}(M),\ M\text{-}A\text{modulo}\}$ e analogo $\mathrm{gdhi}(A)$

<u>Prop</u>: Vale $\mathrm{dhp}(M) = \max\{n : \exists N \text{ con } \mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0\}$

<u>Dim</u>: $n = \mathrm{dhp}(M) \Rightarrow 0 \to P^{-n} \to \dots \to P^{-1} \to P^0 \to M \to 0$
$0 \to \mathrm{Hom}(P^0,N) \to \mathrm{Hom}(P^{-1},N) \to \dots \to \mathrm{Hom}(P^{-n},N) \to 0$

$\Rightarrow \mathrm{Ext}^{n+i}(M,N) = R^{n+i}\mathrm{Hom}(M,N) = H^{n+i}(\mathrm{Hom}(P^\cdot,N)) = 0$
$\forall i > 0$

$\Rightarrow \max\{n : \exists N\ \mathrm{Ext}^n(M,N) \neq 0\} \leq n$

Vediamo l'altra disuguaglianza:

$\mathrm{Ext}^i(M,N)=0 \quad \forall i>n$ e dimostro che M ha una ris proiettiva lunga al più n.

$\Rightarrow$ costruisco una ris di M "quasi" proiettiva

$$0 \to \underset{\ker}{\underline{\underline{X}}} \to P^{-(n-1)} \to \dots \to P^{-1} \to P^0 \to M \quad \text{esatta}$$

(Come) Nella dimostrazione precedente: $\mathrm{Ext}^i(X) = \mathrm{Ext}^{i+n}(M)$

$\mathrm{Ext}^1(X,Y) \longleftrightarrow \left(\{ 0 \to Y \to \underset{\text{esatta}}{E} \to X \to 0 \} / \sim \right) \mathcal{E}$ 11/21

dove per $\sim$ dico:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y & \to & E & \to & X & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow\wr & & \| & & \\ 0 & \to & Y & \to & E' & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

Ora: $0 \to K \to F \xrightarrow{\pi} X \to 0$ esatta, F libero (basta proiettivo)

$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Hom}(F,Y) \to \mathrm{Hom}(K,Y) \to \mathrm{Ext}^1(X,Y) \to \underset{=0}{\mathrm{Ext}^1(F,Y)}$

quindi: $\mathrm{Ext}^1(X,Y) \simeq \dfrac{\mathrm{Hom}(K,Y)}{\mathrm{Hom}(F,Y)}$

Ora

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & F & \to & X & \to & 0 \\ & & \downarrow\varphi & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & Y & \to & \dfrac{Y\oplus F}{\{(-\varphi(k),k)\}} & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

quindi è esatta

- $y \to [y,0]=0$ vuol dire $(y,0)=(-\varphi(k),k) \to k=0,\ y=0$
- $[y,f] \to \pi(f)$:- $[y,0] \to 0 \ \forall y$
  - $[y-\varphi(k), k+f] \to \pi(f+k) = \pi(f)$

  $[y,f] \to 0 \Rightarrow \pi(f)=0 \to f\in K$
  $\Rightarrow [y,f] = [y+\varphi(f), 0] \in \mathrm{Im}\, Y$

quindi:

$$\varphi \in \mathrm{Hom}(K,Y) \to 0 \to Y \xrightarrow{d_\varphi} E_\varphi \xrightarrow{p_\varphi} X \to 0$$

Voglio far vedere che $[\varphi]=[\psi]$ in Ext^1 $\Rightarrow$ le successioni associate sono uguali via $\sim$ (·)

$\psi = \varphi + \chi$ con $\chi \in \mathrm{Hom}(F,Y)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E}_\varphi: & 0 \to & Y & \xrightarrow{d_\varphi} & \dfrac{Y\oplus F}{\{(-\varphi(k),k)\}} & \xrightarrow{p_\varphi} & X & \longrightarrow 0 \\ & & \| & & \downarrow\beta & & \| & \\ \mathcal{E}_\psi: & 0 \to & Y & \xrightarrow{d_\psi} & \dfrac{Y\oplus F}{\{(-\varphi(k)+\chi(k),k)\}} & \xrightarrow{p_\psi} & X & \longrightarrow 0 \end{array}$$

costruisco β t.c.

$\beta[y,0] = [y,0]$

$p_\psi(\beta[y,f]) = p_\varphi(\pi(f))$

scelgo: $\beta[y,f] = [y-\chi(f), f]$ ed è ben def

$\beta[y-\varphi(k), f+k] = [y-\underline{\varphi(k)}-\chi(f)\ \underline{-\ \chi(k)}, f+k] = [y-\chi(f), f]$

Abbiamo costruito: $\mathrm{Ext}^1(X,Y) \longrightarrow \mathcal{E}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad \varphi \qquad\qquad\quad \mathcal{E}_\varphi$

Data
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & E \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{E}}"] & F \arrow[r] \arrow[u, "\gamma"] & X \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$
- γ esiste per proiettività di F e $\gamma(K) \subset Y$

Oss: $F: A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ esatto a sx, diciamo che $M \in A\text{-mod}$ è adatto per F se $R^i(F(M^\cdot)) = 0 \quad \forall i > 0$

Oss: tutti gli I iniettivi sono adatti $\forall$ funtore F esatto a sx

Prop: (i funtori derivati si possono calcolare utilizzando gli oggetti adatti)
$0 \to X \to M^0 \to M^1 \to \dots$ è esatta e gli M^i sono adatti per F
$\Rightarrow H^i(F(M^\cdot)) \simeq R^i F(X)$

Dim: Induzione su i: da $0 \to X \to M^0 \to M^1$ trovo
$0 \to FX \to FM^0 \to FM^1 \Rightarrow FX \simeq H^0 F(M^\cdot)$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & Y \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & M^0 \arrow[u] \arrow[r] & M^1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
allora: $0 \to Y \to M^1 \to M^2 \to \dots$ esatta

$\Rightarrow 0 \to X \to M^0 \to Y \to 0$

da cui $0 \to FX \to FM^0 \to FY \to R^1FX \to 0$ e $R^{i+1}FX \simeq R^iFY$, $i \geq 1$

$i \geq 1$: $R^{i+1}FX \simeq R^iFY \simeq H^i(F(M^1 \to M^2 \to \dots)) = H^{i+1}(F(M^\cdot))$

$R^1FX \overset{\frac{FY}{\mathrm{Im}(FX \to F}}{\simeq} \dfrac{FY}{FM^0} = \dfrac{\ker(\partial^1: M^1 \to M^2)}{FM^0} \simeq H^1(M^\cdot)$

Def: $F^n: A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ additivi $\forall n \geq 0$ e supponiamo che
- $\forall \mathcal{E}: 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ abbiamo $0 \to F^0X \xrightarrow{F_\alpha} F^0Y \xrightarrow{F_\beta} F^0Z \xrightarrow{w^0_{\mathcal{E}}} F^1X \to F^1Y \to$ esatta
- queste successioni esatte lunghe sono naturali in $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F^0X \arrow[r] \arrow[d] & F^0Y \arrow[r] \arrow[d] & F^0Z \arrow[r] \arrow[d] & F^1X \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & F^0X' \arrow[r] & F^0Y' \arrow[r] & F^0Z' \arrow[r] & F^1X' \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (F^n, w^n)$ si dice un δ-funtore

(F^n, w^n) (G^n, χ^n) sono δ-funtori, una trasformazione naturale

$\alpha : (F^n, w^n) \Rightarrow (G^n, \chi^n)$ è $\alpha^n : F^n \Rightarrow G^n$ $\forall n$ t.c. $\forall$

$\mathcal{E} : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$ succ esatta corta

$$\begin{tikzcd} F^n Z \arrow[r, "w^n"] \arrow[d, "\alpha^n_Z"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F^{n+1} X \arrow[d, "\alpha^{n+1}_X"] \\ G^n Z \arrow[r, "\chi^n"'] & G^{n+1} X \end{tikzcd} \quad \forall n$$

Per quanto abbiamo visto i FUNTORI DERIVATI sono δ-funtori $(R^n F, w^n)$

<u>Def</u>: Un δ-funtore si dice universale se $\forall (G^n, \chi^n)$, $\alpha^0 : F^0 \Rightarrow G^0$ esiste un unico $\alpha : (F^n, w^n) \Rightarrow (G^n, \chi^n)$ che estende α^0

<u>Lemma</u>: (F^n, w^n) δ-funtore: $\forall X \ \exists Y$ e $j : X \hookrightarrow Y$ t.c. $F^n(Y) = 0 \ \forall n > 0$

$\Rightarrow (F^n, w^n)$ è UNIVERSALE

<u>Cor</u>: F ex a sx: $(R^n F, w^n)$ è UNIVERSALE

<u>Dim</u>: $\alpha^0 : F^0 \Rightarrow G^0$ nat con (G^n, w^n) delta funtore: costruiamo α

- $\alpha^1 : F^1 \Rightarrow G^1$ t.c. $\forall \mathcal{E} : 0 \to X \to Y \to Z$:

$$\begin{tikzcd} F^0 Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F^1 X \arrow[d] \\ G^0 Z \arrow[r] & G^1 X \end{tikzcd}$$

Devo definire α^1_X $\forall X$:

Fisso X, $\exists Y$ t.c. $0 \to X \xrightarrow{j} Y \to \underset{Z}{\operatorname{coker} j} \to 0$

$$\begin{tikzcd} F^0 Y \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0_Y"'] & F^0 Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0_Z"'] \arrow[dr] & F^1 X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1_X"] & 0 \\ G^0 Y \arrow[r] & G^0 Z \arrow[r] & G^1 X & \end{tikzcd}$$

Osservo: $\to\downarrow\to = \downarrow\to\to = 0$

$\Rightarrow F^0 Y \subset \ker \searrow$ e $F^1 X = \frac{F^0 Z}{F^0 Y}$

$\underset{1° \text{ tomo}}{\longrightarrow}$ $\exists! \, \alpha^1_X : F^1 X \to G^1 X$

Bisogna far vedere che α^1_X è trasf naturale
→ lo faccio solo nel caso in cui $\forall X \ \exists j : X \hookrightarrow I_X$ con I_X iniettivo $F^1(I_X) = 0 \ \forall n > 0$
caso che mi interessa per i ∂-funt.

Sia $\varphi : X \to Y$ devo far vedere:

$$\begin{tikzcd} F^1 X \arrow[r, "F^1\varphi"] \arrow[d, "\alpha^1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F^1 Y \arrow[d, "\alpha^1_Y"] \\ G^1 X \arrow[r, "G^1\varphi"'] & G^1 Y \end{tikzcd}$$

So che:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & I_X \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & Q_X \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & I_Y \arrow[r] & Q_Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

trovo ψ per iniett di I_Y
χ per 1° teo omo

ed ho:

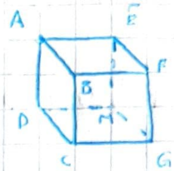
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F^0 X \arrow[r] & F^0 I_X \arrow[r] & F^0 Q_X \arrow[r, two heads, "w"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F^1 X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^1_X"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & G^0 X \arrow[r] & G^0 I_X \arrow[r] & G^0 Q_X \arrow[r] & G^1 X & \end{tikzcd}$$

e uguale per Y

supp. di quella costr. con

Quindi abbiamo il seguente cubo commutativo

$$\begin{tikzcd}
F^0Q_X \arrow[rr, "w_X^F"] \arrow[dd, "\alpha^0_{Q_X}"'] \arrow[dr, "F^0\chi"] & & F^1X \arrow[dd, "\alpha^1_X"] \arrow[dr, "F^1\varphi"] & \\
& F^0Q_Y \arrow[rr, "w_Y^F"] \arrow[dd, "\alpha^0_{Q_Y}"'] & & F^1Y \arrow[dd, "\alpha^1_Y"] \\
G^0Q_X \arrow[rr, "w_X^G"] \arrow[dr, "G^0\chi"'] & & G^1X \arrow[dr, "G^1\varphi"] & \\
& G^0Q_Y \arrow[rr, "w_Y^G"'] & & G^1Y
\end{tikzcd}$$



- AEHD, BFGC commutano per $\circlearrowleft$
- ABCD commuta perché α^0 nat.
- AEFB, DHGC commutano perché F, G ∂-funt.
- Tesi: EFGH commuta cioè

$$G^1\varphi \circ \alpha^1_X = \alpha^1_Y \circ F^1\varphi \quad \text{e poiché } w_X^F \text{ surg: se}$$

$$G^1\varphi \circ \alpha^1_X \circ \underline{w_X^F} = \alpha^1_Y \circ F^1\varphi \circ \underline{w_X^F}$$

$\to\downarrow\searrow \;=\; \downarrow\to\searrow \;=\; \downarrow\searrow\to \;=$

che in effetti è vero (perché tutto il resto commuta)

$= \searrow\downarrow\to \;=\; \searrow\to\downarrow$

$= \to\searrow\downarrow$

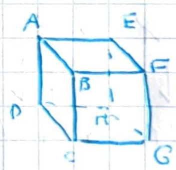
L'ultimo verifica da fare è far vedere che α^1 è di δ-funtori ovvero

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd}
F^0Z \arrow[r] \arrow[d, "\alpha^0_Z"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F^1X \arrow[d, "\alpha^1_X"] \\
G^0Z \arrow[r] & G^1X
\end{tikzcd} \quad \text{commuta}$$

Ancora, guardo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\chi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & I_X \arrow[r] & Q_X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{tikzcd}
F^0Z \arrow[rr, "w^0_F"] \arrow[dd, "\alpha^0_Z"'] \arrow[dr, "F^0\chi"] & & F^1X \arrow[dd, "\alpha^1_X"] \arrow[dr, equal] & \\
& F^0Q_X \arrow[rr] \arrow[dd, "\alpha^0_{Q_X}"'] & & F^1X \arrow[dd] \\
G^0Z \arrow[rr, "w^0_G"'] \arrow[dr, "G^0\chi"'] & & G^1X \arrow[dr, equal] & \\
& G^0Q_X \arrow[rr] & & G^1X
\end{tikzcd}$$



- ABCD nat di α^0
- BCGF def di α^1
- ABFE, DHCG perché F, G ∂-funt
- EFGH ovvio
- Tesi: ADHE commuta cioè

$$\alpha^1_X \circ w^0_F = w^0_G \circ \alpha^0_Z \iff \alpha^1_X \circ w^0_F \circ id_{G^1X} = w^0_G \circ \alpha^0_Z \circ id_{G^1X}$$

ovvero $\to\downarrow\| \;=\; \to\searrow\downarrow \;=\; \searrow\to\downarrow \;=\; \searrow\downarrow\to \;=\; \downarrow\searrow\to \;=\; \downarrow\to\|$

<u>Oss</u>: $F: A\text{mod} \to B\text{mod}$ ex a dx, F^n ∂-funt t.c. $F^0 = F$

$\Rightarrow \exists!\ \alpha: (R^nF, w^n) \to (F^n, \lambda^n)$ di δ-funt.